Méthode pour trouver la forme canonique d'un polynôme du second degré

Quelques exemples de mise sous forme canonique $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
$f(x) = x^2 + 3x + 7$
$= x^2 + 2x\frac{3}{2} + 7 = x^2 + 2x\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 7 = \left(x^2 + 2x\frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) - \frac{9}{4} + \frac{7\times 4}{1\times 4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$
Ainsi $f(x) = 1\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$ et on a donc $a = 1$, $\alpha = -\frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{19}{4}$ Et donc f atteint son minimum $\frac{19}{4}$ en $-\frac{3}{2}$

$g(x) = 3x^2 - 24x - 8$
$= 3(x^2 - 8x) - 8 = 3(x^2 - 2x4 + 4^2 - 4^2) - 8 = 3((x-4)^2 - 16) - 8 = 3(x-4)^2 - 48 - 8$
On a donc $g(x) = 3(x-4)^2 - 56$ et on a donc $a = 3$, $\alpha = 4$ et $\beta = -56$
Et donc g atteint son minimum -56 en 4

généralisation
Exemple brut comme on pourrait le trouver dans une correction donné par le professeur:
Enoncé : Mettre sous forme canonique la fonction f associant pour tout x la quantité $f(x) = 5x^2 - 30x + 7$
Réponse : $f(x) = 5x^2 - 30x + 7 = 5\left(x^2 - \frac{30x}{5}\right) + 7 = 5(x^2 - 6x) + 7 = 5(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 7$
$= 5((x-3)^2 - 9) + 7 = 5(x-3)^2 - 45 + 7 = 5(x-3)^2 - 38$
Ainsi on a : $a = 5$, $\alpha = 3$ et $\beta = -38$

La première chose est de comprendre / être ok avec tout ce qui a été proposé, on est dans le détail, la pure mise en pratique de règles de calculs, il n'y a pas de conscience. Si on a des difficultés à ce moment-là, il faut interroger le professeur.
Une fois que chaque détail est compris on peut verbaliser le nez collé à la feuille et dire quels sont les règles qui ont été utilisées. On peut décrire les opérations. On alors un descriptif qui ne contient que du comment mais pas de but ou de méthode.
Les différentes lignes sont autant d'étapes permettant de passer des conditions initiales de l'énoncé jusqu'à la conclusion attendue dans la question. Pour aller du point A au point B on a fait une série de déplacements qui ont chacun un intérêt, qui nous rapprochent à chaque fois un peu plus du but.
Il nous faut les décrire / nommer / énoncer.
Analyse de l'exemple :
$f(x) = 5x^2 - 30x + 7$ d'abord je décris clairement mon point de départ.
$= 5\left(\frac{5x^2}{5} - \frac{30x}{5}\right) + 7$ je mets 5 l'élément qui multiplie le x^2 en facteur d'une parenthèse contenant les deux premiers éléments chacun divisés par 5.
$= 5(x^2 - 6x) + 7$ je simplifie
$= 5(x^2 - 2 \times x \times 3) + 7$ j'identifie dans ma parenthèses la valeur de u et v si on avait l'identité remarquable $(u-v)^2$
$= 5(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 7$ je rajoute dans ma parenthèse le v^2 et je l'enlève dans la foulée pour commencer.
$= 5((x-3)^2 - 9) + 7$ je factorise les premiers éléments
$= 5(x-3)^2 - 45 + 7$ je développe par rapport à 5
$= 5(x-3)^2 - 38$ je simplifie
Ainsi on a : $a = 5$, $\alpha = 3$ et $\beta = -38$ j'identifie en ayant en tête la forme canonique officielle $a(x-\alpha)^2 + \beta$

A ce stade, on a déjà moins de « comment » et plus de « quoi ». Mais on peut aller encore plus loin :

$f(x) = 5x^2 - 30x + 7$
$= 5\left(\frac{5x^2}{5} - \frac{30x}{5}\right) + 7$ j'identifie la a et factorise les deux premiers éléments de force par rapport à a
$= 5(x^2 - 6x) + 7$ je simplifie
$= 5(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + 7$ je complète la parenthèse pour avoir l'identité remarquable au complet
$= 5((x-3)^2 - 9) + 7$ de là je fais le nécessaire pour me ramener à : $a(x-\alpha)^2 + \beta$
$= 5(x-3)^2 - 45 + 7$
$= 5(x-3)^2 - 38$ puis j'identifie : Ainsi on a : $a = 5$, $\alpha = 3$ et $\beta = -38$

Bonus : nouvelle mise sous forme canonique

$h(x) = -7x^2 + 35x + 2$

$= -7(x^2 - 5x) + 2 = -7\left(x^2 - 2x\frac{5}{2}\right) + 2 = -7\left(x^2 - 2x\frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 2$

$= -7\left(\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) + 2 = -7\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{175}{4} + \frac{2\times 4}{1\times 4}$

On a donc $h(x) = -7\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{183}{4}$ et on a donc $a = -7$, $\alpha = \frac{5}{2}$ et $\beta = \frac{183}{4}$

Et donc h atteint son maximum $\frac{183}{4}$ en $\frac{5}{2}$