Equations et inéquations

Exercices préliminaires : 20,21,26 , 30, 32, 33, 34, 37, 39, 42, 43, 45, 46, 52 P57
Exercices en parallèle : 2,3,5,7,9,11 P55

I. résolution algébrique d'équations

Définition
Le degré d'une équation correspond à la plus haute puissance que l'on peut trouver sur l'inconnue de l'équation une fois celle-ci développée et réduite.

Exemple :
$t^4 - 11t^2 + 2t^8 + 5 = 0$ est une équation de degré 8 d'inconnue t.

A\ Rappels :

1) **Equation du premier degré à une inconnue** : dans un premier temps à l'aide d'additions et de soustractions faites simultanément de part et d'autre du signe d'égalité, on regroupe les termes en x d'un côté, les termes sans de l'autre. Puis à l'aide d'une division (ou d'une multiplication) faite des deux côtés on conclu.
2) **Systèmes d'équations** : voir les trois méthodes proposées au chapitre sur les fonctions de référence.
3) $a\,b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$
4) Pour **les équations de la forme x^2=a** si a est négatif pas de solution si a est nul une solution double : zéro, et si a>0 deux solutions : $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$. Pour les équations plus complexes empruntant cette forme reportez vous à la correction des exercices 7 et 8 p138

B\ Equations du second degré
Les équations du second degré sont de la forme $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$ où a, b et c sont trois coefficients réels.

Formules de développement et de factorisation

$ka + kb = k(a+b)$ $\quad$ $ka - kb = k(a - b)$
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\quad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ $\quad$ $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Confronté à une équation du second degré il faudra dans un premier temps essayer de la factoriser puis résoudre l'équation produit nul obtenue.

Exemple : $(2x + 3)\,x - 4\,(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow (2x + 3)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0$ ou $x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5$ ou $x=4$

Définition
Tout équation du premier degré peut être écrite sous la forme suivante : $(\alpha x+\delta)^2 + \varepsilon = 0$ avec α,δ et ε des réels quelconques. Cette écriture s'appelle la forme canonique de notre équation.

Si on n'arrive pas à factoriser notre équation du second degré on utilisera la forme canonique. Puis il suffira de faire passer ε de l'autre côté du signe égal , puis d'utiliser le rappel 3 pour conclure.

Méthode
1) je fais le nécessaire (développement, simplification, j'ajoute des éléments, je divise, etc) pour que mon équation soit sous la forme : $\mathbf{x^2 + \mu x = \lambda}$
2) Je considère que $x^2 + \mu x$ correspondent aux premiers éléments de la forme développée de $(a+b)^2$
J'identifie a et b, j'en déduis donc l'expression qu'il me manque pour avoir l'identité remarquable complète
3) j'ajoute cet élément à gauche comme à droite
4) je factorise et je dois obtenir une expression de la forme $(x+\boldsymbol{\delta})^2 \mathbf{= \varepsilon}$
5) Une fois la forme $(x+\delta)^2 = \varepsilon$ obtenue

Si $\varepsilon<0$ alors comme un carré ne peut être négatif, il n'y a pas de solution
Si $\varepsilon=0$ c'est une équation produit nul, $(x+\delta)^2 = 0$ donc $x+\delta = 0$ une seule solution $-\delta$
Si $\varepsilon>0$ alors soit $(x+\delta) = \sqrt{\varepsilon}$ soit $(x+\delta) = -\sqrt{\varepsilon}$,la fin est facile.

Exemple :
Résoudre $2x^2 - 8x - 42 = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 21 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 21$ (je reconnais le début de $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$)
$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 21 + 4 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 25 \Leftrightarrow x - 2 = 5$ ou $x - 2 = -5 \Leftrightarrow x = 7$ ou $x = -3$

$x^2-2x-15= 0$	*$x^2 + 8x + 24 = 0$*	*$x^2+11x+18= 0$*	*$x^2- 24x -7 = 0$*	*$x^2-10x+21= 0$*
$x^2 +14x + 49 = 0$	*$2x^2 -3x -20 = 0$*	*$-3x^2+12x + 63=0$*	*$-x^2+9x-20=0$*	*$-5x^2+8x-3 = 0$*

II. équations faisant intervenir au moins une fonction

A\ Equations de la forme f(x) = a

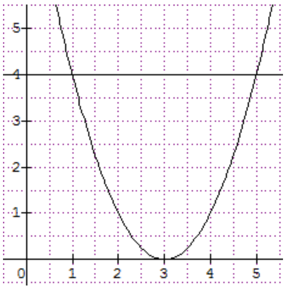
Résoudre une équation de la forme $f(x) = a$ c'est chercher les antécédents de 'a' par la fonction 'f'.
Approche graphique : on trace la droite horizontale d'équation $y=a$ et on aura comme solution les abscisses des points d'intersection entre la courbe et la droite.
Approche algébrique : on remplace $f(x)$ par l'expression définissant f, puis on résout.

Exemple :
soit f la fonction qui à x associe $f(x) = (x - 3)^2$, on se propose de résoudre l'équation $f(x) = 4$.
Par le calcul :

$(x-3)^2 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 2^2 = 0$
$\Leftrightarrow [(x-3)-2][(x-3)+2] = 0 \Leftrightarrow [x -5] [x-1] = 0$ donc S={1 ;5}

Graphiquement :

On trace la courbe représentative de f ainsi que la droite d'équation $y = 4$
On lit les abscisses des points d'intersection, les solutions semblent être 1 et 5.



B\ Equations de la forme f(x) = g(x)

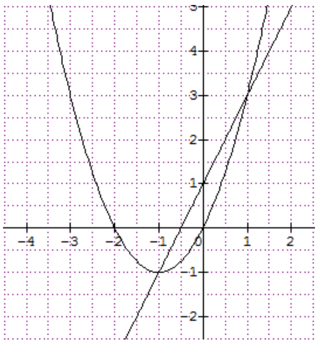
Résoudre une équation de la forme $f(x) = g(x)$ c'est chercher les nombres qui ont même image par f et par g.
Approche graphique : on lit les abscisses des points d'intersection entre les courbes représentant f et g.
Approche algébrique : on remplace $f(x)$ et $g(x)$ par les expressions les définissant, puis on résout.

Exemple :
Soit f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x$ et $g(x) = 2x + 1$. Résoudre $f(x)=g(x)$
Par le calcul :

$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2 + 2x = 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$
Donc les solutions sont 1 et -1

Graphiquement :

Les deux courbes se coupent aux points de coordonnées (-1 ;-1) et (1 ;3) donc les solutions semblent être -1 et 1.



Exercices 80 à 83P 61
Résoudre $f(x) = k$ dans les cas suivants

$f(x)=x^2-2x -10$ et $k = 5$	$f(x) = x^2+11x+10$ et $k = -8$	$f(x) = x^2 + 8x + 4$ et $k = -20$
$f(x) =x^2-5x+11$ et $g(x) = 5x - 10$	$f(x) = 2x^2$ et $g(x)=3x +20$	$f(x)= 2x^2 -12x$ et $g(x) = -x^2 +63$

III. inéquations

A\ Rappels

1) **Inéquation de degrés un à une inconnue** : on procède comme pour les équations, cependant lors de la dernière étape on doit prendre en considération qu'une multiplication ou une division par un nombre négatif change l'ordre (alors que toutes les autres opérations le laissent inchangé).

2) **Représentation graphique des solutions d'une inéquation** :
   a. Si l'inconnue est plus petite que la valeur, on coloriera les solutions à gauche de la valeur, dans le cas contraire elles seront à droite.
   b. Si l'inégalité est large le crochet est orienté vers la zone coloriée des solutions, si elle est stricte on l'orientera vers la zone non coloriée des non solutions.

B\ Tableau de signe

On sait gérer le signe d'une expression du premier degré (par exemple 3x-5>0) mais pas du second ou du troisième degrés (par exemple x^2 -5x + 3 <0) , cependant si l'on peut factoriser l'expression, la détermination du signe sera facile.

Exemple : on veut résoudre $(x-5)(4+x) \leq 0$ on sait qu'un produit est négatif si il possède un nombre impair de facteurs négatifs, donc il nous suffit de savoir quand est ce qu'un des deux facteurs est négatif et que l'autre est positif. On sait que x – 5 ≤ 0 si x ≤ 5 et 4 + x≤0 si x≤-4, donc le système a pour solutions les x de [-4 ;5].

Il y a moins fastidieux pour répondre :

x	$-\infty$		-4		5		$+\infty$
x+4		-	0	+	|	+	
x-5		-	|	-	0	+	
(x+4)(x-5)		+	0	-	0	+	

on lit S=[-4 ;5]

Remarque : la règle des signes est aussi valable pour les quotients, il faudra garder en tête que l'on n'a pas le droit de diviser par zéro, donc pour la dernière ligne au lieu de mettre des zéros pour les valeurs d'annulation du dénominateur on mettra des doubles barres.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		7		$+\infty$
3x-2		-	0	+	|	+	
-6		-	|	-	|	-	
7-x		+	|	+	0	-	
$\frac{3x-2}{-6(7-x)}$		+	0	-	||	+	

C\ Inéquations de la forme f(x) > a

Résoudre une inéquation de la forme f(x) > a ou $(x) \geq a$, (f(x) < a ou f(x) ≤ a) correspond à chercher les abscisse des points de la courbe étant au-dessus (en-dessous) de la droite d'équation y = a.

Remarque : la différence entre une inéquation large et une stricte est qu'il faudra prendre dans l'ensemble des solutions les valeurs correspondant points d'intersection pour la première et non pour la seconde.

Exemple : si je veux résoudre $(x-3)^2 \leq 4$ graphiquement je regarde les x pour lesquels la courbe est au-dessus de la droite, ce qui semble être [1 ;5]

D\ Inéquations de la forme f(x) > g(x)

Résoudre une inéquation de la forme f(x) > g(x) ou $(x) \geq$ g(x) , (f(x) < g(x) ou f(x) ≤ g(x)) correspond à chercher les abscisse des points de la courbe représentative de f étant au-dessus (en-dessous) de celle de la fonction g.

Exemple :

Reprenons l'exemple du I.C avec f(x) = x^2 + 2x et g(x) = 2x + 1, la question est maintenant résoudre f(x)>g(x)

Par le calcul :

f(x)>g(x) ⇔ $x^2 + 2x > 2x + 1$

⇔ $x^2 - 1 > 0$ ⇔ (x – 1)(x+1) > 0

Donc $S =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x+1		-	0	+	|	+	
x-1		-	|	-	0	+	
(x+1)(x-1)		+	0	-	0	+	

Graphiquement :

Je regarde la figure déjà dessinée au I. C et je regarde les x pour lesquels on a la courbe représentative de f au-dessus de celle de g , et l'ensemble de solution semble être $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$

22 à 39 P 104 pour la base des tableaux

\+ Problèmes 44 51 56 58 et 59