Correction des exercices sur les équations et les inéquations (chapitres 2 et 4 du livre)

Exercice 2P55
x et y sont deux longueurs donc elles sont positives.
L'aire orange est $(x+y)^2/2 - y^2/2 = (x^2+2y)/2 = x^2/2 + y$
Si on veut que l'aire de la partie orange soit de 100 alors on doit avoir $\frac{x^2}{2} - y = 100$
On peut exprimer y en fonction de x : $y = x^2/2 - 100$
ou le contraire $x^2 = 2y + 200$ donc $x = \sqrt{2y+200}$

Exercice 3P55 (une fois que l'on a vu la forme canonique)
Le volume de l'ensemble est de $(x+1)^2 + x^2 = 2x^2 + 2x + 1$
Le triple du volume du plus petit cube est de : $3x^2$
On veut donc avoir : $2x^2 + 2x + 1 = 3x^2$ et donc que $0 = -1 - 2x + x^2$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 + 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{2}$ ou $x + 1 = -\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{2}$ ou $x = -1 - \sqrt{2}$

Exercice 5P55
Le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$
Si on pose x le côté d'un cube alors le rayon est x/2 donc le volume de la sphère de diamètre x sera :
$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{x^3}{8} = \frac{1}{6}\pi x^3$
Le volume d'un cube de côté x est x^3 donc le volume de deux cubes et deux sphères sera :
$2\frac{1}{6}\pi x^3 + 2x^3 = \left(\frac{\pi}{3}+1\right)x^3$
On veut que le volume de ces quatre bouchées soit de $16cm^3$ donc la relation est :
$\left(\frac{\pi}{3}+1\right)x^3 = 16$ Résolution (bonus) : $\left(\frac{\pi}{3}+1\right)x^3 = 16 \Leftrightarrow x^3 = \frac{16}{\left(\frac{\pi}{3}+1\right)} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{16}{\left(\frac{\pi}{3}+1\right)}}$

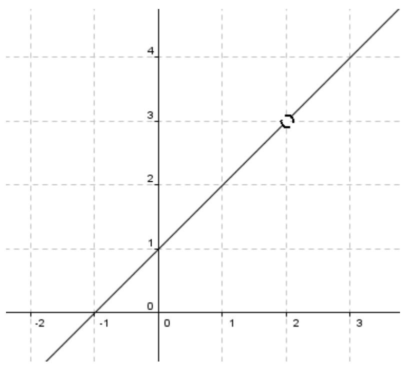
Exercice 6P55

nombre de marches	1	2	3	4	5	6
nombre de caisses	1	3	6	10	15	21

5 marches : 1+2+3+4+5 6 marches : 1+2+3+4+5+6 7 marches : 1+2+3+4+5+6+7
Donc pour n marches : 1 + 2 + 3 + ...+(n-2) +(n-1) + n
Ce qui est la même chose que n + (n-1) +(n-2) .... + 3 + 2 +1
Si on ajoute on obtient le nombre de caisse pour deux escaliers de n marches.
Si on ajoute on les termes alignés : on a (n+1) + (2+n-1) + (3+n-2) + …… (n-2+3) + (n-1+2) + (n+1)
Autrement dit (n+1) + (n+1) + ….. (n+1) et on a n termes identiques qui valent tous (n+1)
Donc on a n(n+1) caisses pour faire deux escaliers, pour en faire un seul on prendra donc : $\frac{n(n+1)}{2}$ caisses.

Exercice 7P55
1) $(x-1)(x+4) = x^2 + 4x - x - 4 = x^2 + 3x - 4 = A(x)$
2) $A(0) = 0^2 + 3\times 0 - 4 = -4$
$A(1) = (1-1)(1+4) = 0$ $A(-4) = (-4-1)(-4+4) = 0$
$A(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+4) = 0 \Leftrightarrow (x-1) = 0$ ou $(x+4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -4$

Exercice 9P55
1) $(2x+1)(2x+5) = 4x^2 + 10x + 2x + 5 = 4x^2 + 12x + 5 = A(x)$
$(2x+3)^2 - 4 = 4x^2 + 12X + 9 - 4 = 4x^2 + 12x + 5 = A(x)$
2) $A(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}^2 + 12\sqrt{2} + 5 = 8 + 12\sqrt{2} + 5 = 12\sqrt{2} + 13$
$A\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(2\frac{-1}{2}+1\right)\left(2\frac{-1}{2}+5\right) = 0$



Exercice 11P56
1) on a à faire à une fraction donc il faudra retirer les valeurs annulant le dénominateur. X -1 = 0 ⇔ x = 1
Donc $D = \mathbb{R} - \{1\}$
2) Soit $x \in D$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \frac{x+1}{1} = x + 1$, le passage de l'égalité en rouge ne peut se faire que parce que $x \in D$, ce qui me donne le droit de diviser le numérateur et le dénominateur par le même terme x-1 qui est non nul.
3)

Exercice 21P56
A = (x+2) (2x+3) = $2x^2 + 7x + 6$ B = (x+5) (x-2) = $x^2 + 3x - 10$

Exercice 26P56
A = $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ B = $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$

Exercice 30P56
A = (a+b+c) (a+b – c) = $a^2 + ab - ac + ab + b^2 - bc + ac + bc - c^2 = a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$
B = (a-b+c) (a+b + c) = $a^2 + ab + ac - ab - b^2 - bc + ac + bc + c^2 = a^2 - b^2 + c^2 + 2ac$

Exercice 32P56
A = $(x+1)^3 = (x^2 + 2x + 1)(x+1) = \ldots = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ B = $(x-1)^3 = (x^2 - 2x + 1)(x-1) = \ldots = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

Exercice 33P56
A = (x+1) (x+2) + 3(x+1) = (x+1)[(x+2) + 3] = (x+1)[x+5]
B = (x-1) (2 + x) + (x+5) (1-x) = (x-1)(2 + x) - (x+5)(1+x) = (x-1)[(2 + x) - (x+5)]= (x-1)[-3]

Exercice 34P56
A = (x-3) (x+1) + 2x- 6 = (x-3)(x+1) + 2(x- 3) = (x-3)[(x+1) + 2] = (x-3)(x+3)
B = (2x – 5) (x-1) – 4x + 10 = (2x – 5) (x-1) -2(2x-5) = (2x – 5)[(x-1) -2]= (2x – 5)[(x-3)]

Exercice 37P56
A = $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x-2)(x+2)$ B = $9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x-1)(3x+1)$

Exercice 39P56
A = $(x+1)^2 - 25 = (x+1)^2 - 5^2$ = [(x+1)-5][(x+1)+5] = [x -4][x+6]
B = $(2x+1)^2 - (5x-3)^2$ = [(2x+1) – (5x-3)] [(2x+1) + (5x-3)]=[4-3x][7x-2]

Exercice 41P56
A = $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ B = $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Exercice 43P56
A = $9x^2 + 24x + 16 = (3x)^2 + 2.3x.4 + 4^2 = (3x + 4)^2$ B = $4 - 20x + 25x^2 = (2 - 5x)^2$

Exercice 45P56
A = $5(x^2-2x+1) - 3(x-1) = 5(x-1)^2 - 3(x-1)$ = (x-1)[5(x-1)-3] = (x-1)[5x-5-3] = (x-1)[5x-8]
B = x^2-9 – (x-3)(5x+2) = (x-3)(x+3) – (x-3)(5x+2) = (x-3)[(x+3)-(5x +2)] = (x-3)[-4x+1]

Exercice 46P56
A = $2(4x^2-4x+1) - 5(2x-1) = 2(2x-1)^2 - 5(2x-1)$ = (2x-1)[2(2x-1)-5] = (2x -1)[4x-4-5] = (2x – 1) [4x-9]
B = $9x^2 - 1$ + (6x-2)(x –4) = (3x – 1)(3x + 1) + 2(3x-1)(x-4) = (3x-1)[(3x+1) + 2(x-4)] = (3x-1)[3x+1+2x-8] = (3x-1)[5x-7]

Exercice 48P56
A = $x^3 + x^2 + x + 1 = (x+1)x^2 + (x+1)1 = (x+1)(x^2+1)$ B = $x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)x^2 + (x-1)1 = (x-1)(x^2+1)$

Exercice 49P56
$f(x) = 3 + \frac{1}{x-2} = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = \frac{3x-5}{x-2}$ avec $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ $g(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(2x-1)x-1}{x} = \frac{2x^2-x-1}{x}$ avec $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

Exercice 50P56
$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$ avec $D_f = \mathbb{R} - \{1; -1\}$
$g(x) = \frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{-x-1}{(x+2)(x-2)} = \frac{2}{(x+1)(x-1)}$ avec $D_g = \mathbb{R} - \{2; -2\}$

Exercice 52P56
$f(x) = \frac{x-2}{3x-1} - \frac{x+1}{3x-1} = \frac{-3}{3x-1}$ avec $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$
$g(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{4}{(x-1)(x-5)} = \frac{1(x-5)}{(x-1)(x-2)(x-5)} + \frac{4(x-2)}{(x-1)(x-5)(x-2)} = \frac{1(x-5)+4(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-5)} = \frac{x-5+4x-8}{(x-1)(x-2)(x-5)} = \frac{5x-13}{(x-1)(x-2)(x-5)}$

Equations à mettre sous forme canonique

x^2-2x-15= 0 $\Leftrightarrow$ x^2 -2x = 15 $\Leftrightarrow$ x^2 -2x +1 = 15 + 1 $\Leftrightarrow$ $(x+1)^2 = 16$ $\Leftrightarrow$ x+1 = 4 ou x + 1 = -4 $\Leftrightarrow$ x = 3 ou x = -5

x^2 + 8x + 24 = 0 $\Leftrightarrow$ x^2 + 8x = -24 $\Leftrightarrow$ x^2 + 8x + 16 = 16 – 24 $\Leftrightarrow$ $(x+8)^2$ = -8 or un carré ne peut être négatif : pas de solution.

x^2+11x+18= 0 $\Leftrightarrow$ x^2 + 11x = -18 $\Leftrightarrow$ $x^2 + 11x + 5{,}5^2 = - 18 +5{,}5^2$ $\Leftrightarrow$ $(x+5{,}5)^2 = 12{,}25$ $\Leftrightarrow$ x+5,5 = 3,5 ou x + 5,5 = -3,5
$\Leftrightarrow$ x = -2 ou x = -9

x^2- 24x -7 = 0 $\Leftrightarrow$ x^2 -24x = 7 $\Leftrightarrow$ $x^2 -24x + 12^2 = 7+ 12^2$ $\Leftrightarrow$ $(x-12)^2 = 151$ $\Leftrightarrow$ $x-12=\sqrt{151}$ ou $x-12=-\sqrt{151}$
$\Leftrightarrow$ $x = 12+\sqrt{151}$ ou $x = 12-\sqrt{151}$

x^2-10x+21= 0 $\Leftrightarrow$ x^2 - 10x = -21 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 20x + 5^2 = -21 +25$ $\Leftrightarrow$ $(x-5)^2=4$ $\Leftrightarrow$ x – 5 = -2 ou x – 5 = 2 $\Leftrightarrow$ x = 3 ou x = 7

x^2 +14x + 49 = 0 $\Leftrightarrow$ $(x+7)^2 = 0$ $\Leftrightarrow$ x + 7 = 0 $\Leftrightarrow$ x= 7

$2x^2$ -3x -20 = 0 $\Leftrightarrow$ x^2 -1,5x = 10 $\Leftrightarrow$ $x^2 -1{,}5x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 10 + \left(\frac{3}{4}\right)^2$ $\Leftrightarrow$ $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{169}{16}$ $\Leftrightarrow$ $x-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$ ou $x-\frac{3}{4}=\frac{-13}{4}$
$\Leftrightarrow$ x= 4 ou x = -2,5

$-3x^2$+12x + 63=0 $\Leftrightarrow$ x^2 -4x = 21 $\Leftrightarrow$ x^2 - 4x + 4 = 21 + 4 $\Leftrightarrow$ $(x-2)^2 = 5^2$ $\Leftrightarrow$x-2 = 5 ou x-2 = -5 $\Leftrightarrow$ x = 7 ou x = -3

$-x^2$+9x-20=0 $\Leftrightarrow$ x^2 - 9x = -20 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 9x + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = -20 + \left(\frac{9}{2}\right)^2$ $\Leftrightarrow$ $\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$ $x-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$ ou $x-\frac{9}{2}=\frac{-1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $x=5$ ou $x=4$

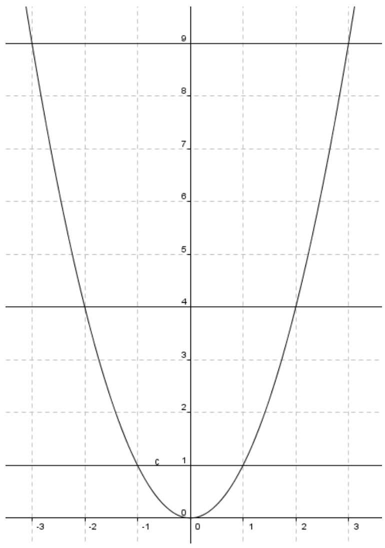
$-5x^2$+8x-3 = 0 $\Leftrightarrow$ $x^2-\frac{8}{5}x=\frac{-3}{5}$ $\Leftrightarrow$ $x^2-\frac{8}{5}x+\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{-3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2$ $\Leftrightarrow$ $\left(x-\frac{4}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$ $\Leftrightarrow$ $x-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$ ou $x-\frac{4}{5}=\frac{-1}{5}$ $\Leftrightarrow$ $x=1$ ou $x=\frac{3}{5}$

Résolution d'inéquations

8P103
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1;3]$ $f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in]0;3]$

9P103
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in [-4;0[\cup]3;4]$ $f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in]-1;4[$ $f(x) \leq -1 \Leftrightarrow x = 2$

10P103
$f(x) > -1 \Leftrightarrow x \in [-3;-1[\cup]-1;4]$ $0 \leq f(x) < 2 \Leftrightarrow x \in [1;2[\cup]3;4]$

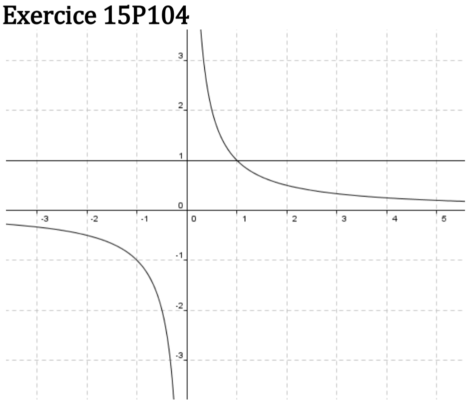


Exercice 11P103

x	-4		-2		1		3
(3x-2)(x+5)		-	0	+	0	-	

Exercice 13P103
x^2<1 $\Leftrightarrow$ $x \in [-1;1]$ on regarde ce qui est sous la droite d'équation y = 1
x^2>9 $\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;-3[\cup]3;+\infty[$ on regarde ce qui est au-dessus la droite d'équation y = 9
x^2-4<0 $\Leftrightarrow$ $x^2 < 4$ $\Leftrightarrow$ $x \in [-2;2]$ on regarde ce qui est sous la droite d'équation y = 4

Exercice 15P104



Les solutions sont S=$]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$

L'erreur qui a été faite est la suivante :
$\frac{1}{x} < 1$ elle a multiplié de chaque côté par x et elle a cru obtenir 1<x mais elle a négligé le fait que x pouvait être négatif et dans ce cas la multiplication de chaque côté par x change l'ordre et on a : x<1, (mais attention on vient de dire

que l'on prenait des valeurs strictement négatives donc on ne prendra pas tout ce qui est dans]0 ;1[

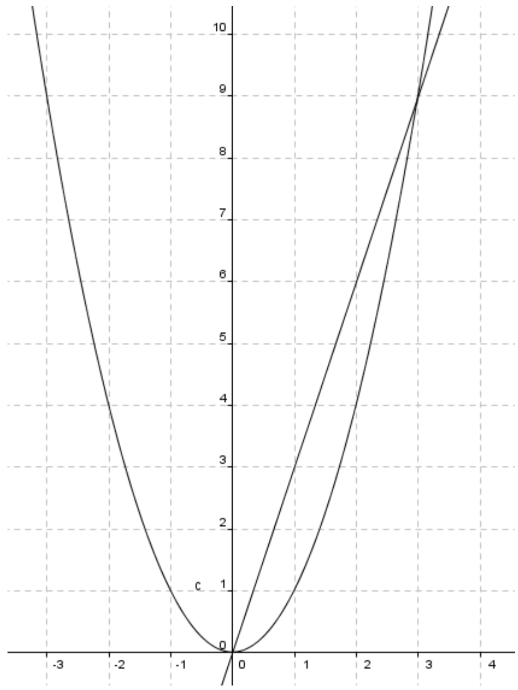
Résolution sérieuse :

$\frac{1}{x} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} < 1 \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} \frac{1}{x} < 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x \\ x > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 1 > x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow]1; +\infty[$ ou $=]-\infty; 0[\Leftrightarrow$ S$=]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$

Exercice 17P104

f(x) $\leq g(x)$ correspond aux abscisses des points de la courbe représentative de la fonction f, quand elle est au-desssus ou confondue avec celle de la fonction g.

ici S= [2 ;5]



Exercice 18P104

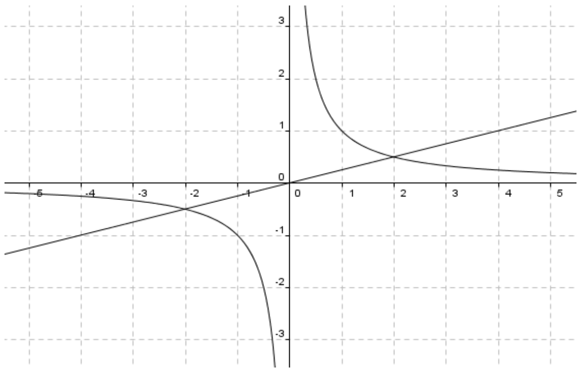
1) $x^2 = 3x \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x-3)=0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x-3 = 0 \Leftrightarrow$ S={0 ;3}

2)

3) on considère les abscisses des points de la parabole situés sous la droite

S=]0 ;3[

Exercice 20P104



$$\frac{1}{x} = \frac{x}{4}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{x^2}{4} \\ x \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x^2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x^2 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

S={-2 ;2}

La résolution graphique correspond à repérer les abscisses des points de l'hyperbole situés au-dessus de la droite

$x \in]-\infty; -2[\cup]0; 2]$

Exercice 22P104

a)

x	$-\infty$		0,5		2		$+\infty$
x-2		-	|	-	0	+	
2x-1		-	0	+	|	+	
(x-2)(2x-1)		+	0	-	0	+	

b)

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		5		$+\infty$
x-5		-	|	-	0	+	
-3x+2		+	0	-	|	-	
(3x-2)(x+5)		-	0	+	0	-	

Exercice 23P104

a)

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		1,5		$+\infty$
3 - 2x		+		+	0	-	
-6x+5		+	0	-		-	
(3 - 2x)(-6x+5)		+	0	-	0	+	

b)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
2-x		+		+	0	-	
3x		-	0	+		+	
3x(2-x)		-	0	+	0	-	

Exercice 27P104
a)

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
x-5		-		-	0	+	
x+2		-	0	+		+	
(x-5)(x+2)		+	0	-	0	+	

(x-5)(x+2)>0 ⇔ $x \in]-\infty; -2[\cup]5; +\infty[$
b)

x	$-\infty$		0,5		0,6		$+\infty$
3x+5		-		-	0	+	
2x-1		-	0	+		+	
(3x+5)(2x-1)		+	0	-	0	+	

(3x+5)(2x-1) < 0 ⇔ S = [0,5 ; 0,6]

Exercice 29P104

x	$-\infty$		0		3		5		$+\infty$
x^2		+	0	+		+		+	
x-3		-		-	0	+		+	
x-5		-		-		-	0	+	
$x^2(x-3)(x-5)$		+	0	+	0	-	0	+	

$x^2(x-3)(x-5) \geq 0\ x \in]-\infty; 3] \cup [5; +\infty[$

b)

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$(x+2)^2$		+	0	+		+		+	
x		-		-	0	+		+	
x-3		-		-		-	0	+	
$x(x+2)^2(x-3)$		+	0	+	0	-	0	+	

$x(x+2)^2(x-3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [0; 3]$

Pick & Mix : Ex 30, 31 et 32 P104
30a) $x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq 0$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x-2		-		-	0	+	
x+2		-	0	+		+	
(x-2)(x+2)		+	0	-	0	+	

S=[-2 ;2]

31c) $(3x-1)^2-2>0 \Leftrightarrow (3x-1)^2 - \sqrt{2}^2 > 0 \Leftrightarrow (3x-1-\sqrt{2})(3x-1+\sqrt{2}) > 0$

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{2}}{3}$		$\frac{1+\sqrt{2}}{3}$		$+\infty$
$3x-1-\sqrt{2}$		-		-	0	+	
$3x-1+\sqrt{2}$		-	0	+		+	
$(3x-1-\sqrt{2})\ (3x-1+\sqrt{2})$		+	0	-	0	+	

$(3x-1)^2-2>0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \frac{1-\sqrt{2}}{3}[\cup]\frac{1+\sqrt{2}}{3}; +\infty[$

32a) $(3x-2)^2-4(3x-2)>0 \Leftrightarrow (3x-2)((3x-2)-4)>0 \Leftrightarrow (3x-2)(3x-6)>0$

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
3x-6		-		-	0	+	
3x-2		-	0	+		+	
(3x-2)(3x-6)		+	0	-	0	+	

(3x-2)²-4(3x-2)>0 $\Leftrightarrow x \in]-\infty;\frac{2}{3}[\cup]2;+\infty[$

32b) $(2x-5)^2-(x-2)^2<0 \Leftrightarrow [(2x-5)-(x-2)]\,[(2x-5)+(x-2)]<0$ $\Leftrightarrow [x-3]\,[3x-7]<0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{7}{3};3\right]$

35 P105

a)

$\frac{x-2}{x-3} > 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;2[\cup]3;+\infty[$

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x-3		-		-	0	+	
x-2		-	0	+		+	
$\frac{x-2}{x-3}$		+	0	-	||	+	

b)

$\frac{3x-1}{x-2} < 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;\frac{1}{3}[\cup]2;+\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
x-2		-		-	0	+	
3x-1		+	0	-		-	
$\frac{3x-1}{x-2}$		-	0	+	||	-	

c)

$\frac{1-2x}{3-x} \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $x \in]-\infty;\frac{1}{2}]\cup]3;+\infty[$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
3-x		+		+	0	-	
1-2x		+	0	-		-	
$\frac{1-2x}{3-x}$		+	0	-	||	+	

38P105

a)

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
2x		-	0	+		+	
1-x		+		+	0	-	
x^2+4		+		+		+	
$\frac{2x(1-x)}{x^2+4}$		-	0	+	0	-	

$\frac{2x(1-x)}{x^2+4} > 0 \Leftrightarrow$ S=]0 ;1[

b)

x	$-\infty$		-2		-1		3		$+\infty$
x+2		-	0	+		+		+	
x+1		-		-	0	+		+	
x-3		-		-		-	0	+	
$\frac{(x+2)(x+1)}{x-3}$		-	0	+	0	-	II	+	

$\frac{(x+2)(x+1)}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2[\cup]-1;3[$