

Fiches méthode : inéquations produit

Résolution d'inéquations où l'on compare un produit ou un quotient avec zéro.

Par exemple $\frac{(3x-5)(8-x)}{(13-3x)(7+2x)} \leq 0$

Phase 1 (préparation)

On commence par faire l'étude de chacun des facteurs de l'expression
On détermine sur quel intervalle chaque facteur est positif, ce qui nous aidera à mettre les « + » dans les bonnes cases

$$\begin{aligned} 3x - 5 \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3} \\ 8 - x \geq 0 &\Leftrightarrow 8 \geq x \\ 13 - 3x \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{13}{3} \geq x \\ 7 + 2x \geq 0 &\Leftrightarrow x \geq -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Phase 2 (tableau de signe)

On peut donc étudier le signe du quotient
D'abord sur la ligne des x , entre $-\infty$ et $+\infty$ on met toutes les valeurs d'annulation dans l'ordre croissant. Puis sur les lignes qui suivent on met les « + » là où notre étude précédente l'indique, ailleurs on mettra des moins et à la jonction des zéros.
Pour la ligne de synthèse on remplira les cases en utilisant la règle des signes des produits.
Sur les traits on mettra des zéros quand au-dessus il y a un zéro pour un facteur du numérateur et une double barre quand le zéro au-dessus correspond au dénominateur.

Etudions le signe de $\frac{(3x-5)(8-x)}{(13-3x)(7+2x)}$

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{13}{3}$	8	$+\infty$
$3x - 5$		-	0	+	+	+
$8 - x$	+	+	+	+	0	-
$13 - 3x$	+	+	+	0	-	-
$7 + 2x$	-	0	+	+	+	+
Q	+		-	0		-
			0		0	+

Phase 3 (interprétation)

Pour ce qui est de la résolution d'inéquation on cherche les cases correspondant à l'inéquation (+ si on cherche à résoudre $Q > 0$ ou ≥ 0 , et - si on cherche à résoudre $Q < 0$ ou $Q \leq 0$)
Pour les crochets, ils sont ouverts si la valeur est interdite, si elle vaut $-\infty$ ou $+\infty$, ou si l'inégalité est stricte, sinon elle sera fermée.

$$\begin{aligned} Q(x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &\in] -7/2 ; 5/3] \cup] 13/3 ; 8] \end{aligned}$$

Bonus 1

$$\begin{aligned} Q(x) &> 0 \\ S &=] -\infty ; -7/2 [\cup] 5/3 ; 13/3 [\cup] 8 ; +\infty [\end{aligned}$$

Bonus 2

Pour une équation $Q(x) = 0$ il nous suffira de glisser dans des accolades tous les x donnant des zéro à la ligne de synthèse.

$$Q(x) = 0 \quad S = \left\{ \frac{5}{3} ; 8 \right\}$$

Application :

Faire le tableau de signe de $\frac{(8x-5)(7x+3)}{(2-5x)(4+x)}$ et en déduire les solutions de :

$$\frac{(8x-5)(7x+3)}{(2-5x)(4+x)} \geq 0$$

$$\frac{(8x-5)(7x+3)}{(2-5x)(4+x)} < 0$$

$$\frac{(8x-5)(7x+3)}{(2-5x)(4+x)} = 0$$