NOTION DE MULTIPLE, DIVISEUR ET NOMBRE PREMIER

I. Multiples et diviseurs

Définition : Soit a et b deux entiers. On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = k\,b$. On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemples et contre-exemple :
a) 15 est un multiple de 3, car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$.
b) 10 est un diviseur de 40, car $40 = k \times 10$ avec $k = 4$.
c) Par contre, 13 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que $13 = k \times 3$.

Propriété :
La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration au programme : avec $a = 3$

Soit b et c deux multiples de 3.
Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3k_1$.
Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3k_2$.
Alors : $b + c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k$, où $k = k_1 + k_2$.
$k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = 3k$ avec k entier.
$b + c$ est donc un multiple de 3.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :
n, $n + 1$ et $n + 2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est $S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$.
Soit k l'entier tel que, $k = n + 1$.

Donc $S = 3k$, avec k entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

II. Nombres premiers (Rappels)

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Exemples :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … Cette liste est infinie.

Remarque :
Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

Définition : On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

Propriété :
Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Exemple : 300 = **2 x 2 x 3 x 5 x 5**

Définition : On dit qu'une fraction est irréductible, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode : Rendre une fraction irréductible

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 : 60 = 2 x 2 x 3 x 5 et 126 = 2 x 3 x 3 x 7

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$ 10 et 21 sont premiers entre eux et donc :

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.