Parité

I. Nombres entiers

1. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N}=\{0\,;1\,;2\,;3\,;4\,;\dots\}$. Exemples : $4 \in \mathbb{N}$ $-2 \notin \mathbb{N}$

2. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}=\{\dots\,;-3\,;\,-2\,;\,-1\,;\,0\,;1\,;2\,;3\,;\dots\}$. Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $5 \in \mathbb{Z}$ $0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

II. Nombres pairs, impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples : 34, 68, et 0 sont des nombres pairs 567, 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.
- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k_1$, avec $k_1 = k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.
- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k_2$, avec $k_2 = (2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Parité

III. Nombres entiers

3. Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif.
L'ensemble des **nombres entiers naturels** est noté $\mathbb{N}$.
$\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$. Exemples : $4 \in \mathbb{N}$ $-2 \notin \mathbb{N}$

4. Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif.
L'ensemble des **nombres entiers relatifs** est noté $\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z} = \{\ldots ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$. Exemples : $-2 \in \mathbb{Z}$ $5 \in \mathbb{Z}$ $0{,}33 \notin \mathbb{Z}$

IV. Nombres pairs, impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples : 34, 68, et 0 sont des nombres pairs 567, 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration au programme :

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.
- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k_1$, avec $k_1 = k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.
- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k_2$, avec $k_2 = (2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.