Exercice 75P54

1) Supposons que n est pair autrement dit supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. On aura alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, or k étant un entier naturel k^2 en sera aussi un. On peut donc dire que $n^2 = 4k'$ avec $k' = k^2$ un entier naturel donc n^2 est divisible par 4.
2) Supposons maintenant que n est impair autrement dit supposons qu'il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$+1.
   On aura alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$, or k étant un entier naturel k^2 en sera aussi un. On peut donc dire que $n^2 = 4k' + 1$ avec $k' = k^2 + k$ un entier naturel donc le reste de la division euclidienne de n^2 par 4.

Aide pour l'exercice 76P54

Pour faire cet exercice on peut suivre les raisonnements habituels
Par exemple pour la question 1a :

Comme a est pair alors $a = 2k_a$ avec k_a un entier
Comme b est impair alors $b = 2k_b + 1$ avec k_b un entier
Ainsi $2a + 3b = 2(2k_a) + 3(2k_b + 1) = 4k_a + 6k_b + 3 = 4k_a + 6k_b + 2 + 1$
$= 2 \times 2k_a + 2 \times 3k_b + 2 \times 1 + 1 = 2(2k_a + 3k_b + 1) + 1 = 2k' + 1$ avec $k' = 2k_a + 3k_b + 1$ un entier, donc $2a + 3b$ est un nombre impair.

Je vous propose pour changer un peu de recycler ce qui a été vu durant la première semaine passée à travailler sur la parité

On admettra les résultats déjà prouvés en cours :

1) Le produit de deux pairs est un pair.
2) Le produit de deux impairs est un impair.
3) Le produit d'un nombre pair par un impair est un nombre pair.
4) La somme (ou la différence) de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs est un nombre pair.
5) La somme (ou la différence) d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Au travail !

1) Supposons que a est pair et b est impair.
   a. 2 est pair et a aussi donc d'après la propriété 1, $2a$ est pair
      3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
      et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.

Exercice 76P54

On admettra les résultats déjà prouvés en cours :

1) Le produit de deux pairs est un pair.
2) Le produit de deux impairs est un impair.
3) Le produit d'un nombre pair par un impair est un nombre pair.
4) La somme (ou la différence) de deux nombres pairs ou de deux nombres impairs est un nombre pair.

5) La somme (ou la différence) d'un nombre pair et d'un nombre impair est un nombre impair.

Au travail !

1) Supposons que a est pair et b est impair.
   a. 2 est pair et a aussi donc d'après la propriété 1, $2a$ est pair
   3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
   et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.
   b. a est pair donc d'après la propriété 1 donc a^2 est pair
   b est impair donc d'après la propriété 2 donc b^2 est impair
   Donc $a^2 - b^2$ d'après la propriété 5 est impair.
   c. 9 est impair et a est pair donc d'après la propriété 3, $9a$ est pair
   4 est pair et b est impair donc d'après la propriété 3, $4b$ est pair
   et donc d'après la propriété 4, $9a + 4b$ est pair.
2) Supposons que a et b sont impair.
   a. 2 est pair et a est impair aussi donc d'après la propriété 3, $2a$ est pair
   3 est impair et b est impair donc d'après la propriété 2, $3b$ est impair
   et donc d'après la propriété 5, $2a + 3b$ est impair.
   b. a est impair donc d'après la propriété 2 donc a^2 est impair
   b est impair donc d'après la propriété 2 donc b^2 est impair
   Donc $a^2 - b^2$ d'après la propriété 4 est pair.
   c. 9 est impair et a est impair donc d'après la propriété 2, $9a$ est impair
   4 est pair et b est impair donc d'après la propriété 3, $4b$ est pair
   et donc d'après la propriété 4, $9a + 4b$ est impair.

Exercice

On s'intéresse à la parité de la somme de quatre entiers consécutifs

1) Tester cette somme avec de vraies valeurs que vous choisirez et conjecturer la parité de la somme.
2) Soit n votre premier entier, exprimer les valeurs des 3 entiers qui le suivent en fonction de n
3) Prouver la conjecture de la première question.

Réponse

1) 7+8+9+10=34 j'ai l'impression que la somme est paire.
2) Les quatre entiers sont n, $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)$
3) $n + (n+1) + (n+2) + (n+3)$

$$= n + n + 1 + n + 2 + n + 3$$
$$= 4n + 6 = 2 \times 2n + 2 \times 3$$
$$= 2(2n+3)$$

$= 2k$avec$k = 2n + 3$ un entier donc n est pair

On s'intéresse à la parité des produits de deux entiers consécutifs

1) Tester la parité de tels produits avec des valeurs de votre choix, puis conjecturer la parité du produit.
2) Pour prouver la conjecture on va raisonner par disjonction des cas. C'est à dire que l'on va couper la démonstration en plusieurs parties. On va subdiviser la situation de départ en deux cas.

a. Supposons que n le premier des deux entiers consécutifs est pair. Prouver votre conjecture.
b. Supposons maintenant que n le premier des deux entiers consécutifs est impair. Prouver votre conjecture.
c. Conclure

Correction

1) $8 \times 9 = 72 = 2 \times 36$ $11 \times 12 = 132 = 2 \times 66$, on a l'impression que le produit est pair.
2) Prouvons la conjecture
   a. Supposons que n est pair. Dans ce cas il peut être écrit sous la forme $n = 2k$ avec k un entier. Ainsi :
   $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k2k + 2k$
   $= 2(k2k + k) = 2k'$ avec $k' = (2k^2 + k)$ donc le produit est pair.
   b. Supposons que n est impair. Dans ce cas il peut être écrit sous la forme $n = 2k + 1$ avec k un entier. Ainsi :
   $n(n+1) = (2k+1)\big((2k+1)+1\big) = (2k+1)(2k+2)$
   $= 2k2k + 2k2 + 2k + 2 = 2k2k + 2k2 + 2k + 2 \times 1$
   $= 2(k2k + k2 + k + 1)$
   $= 2k'$ avec $k' = (2k^2 + k2 + k + 1)$
   donc le produit est pair.
   c. Ainsi quelle que soit la parité du plus petit des deux nombres consécutifs, on aura $n(n+1)$ qui sera pair. Notre conjecture est donc vraie :
   Pour tout entier naturel n le produit $n(n+1)$ est pair
   Ou encore : « le produit de deux nombres consécutifs est pair »