Nom & Prénom : …………………………………………………………………………………… www.dimension-k.com

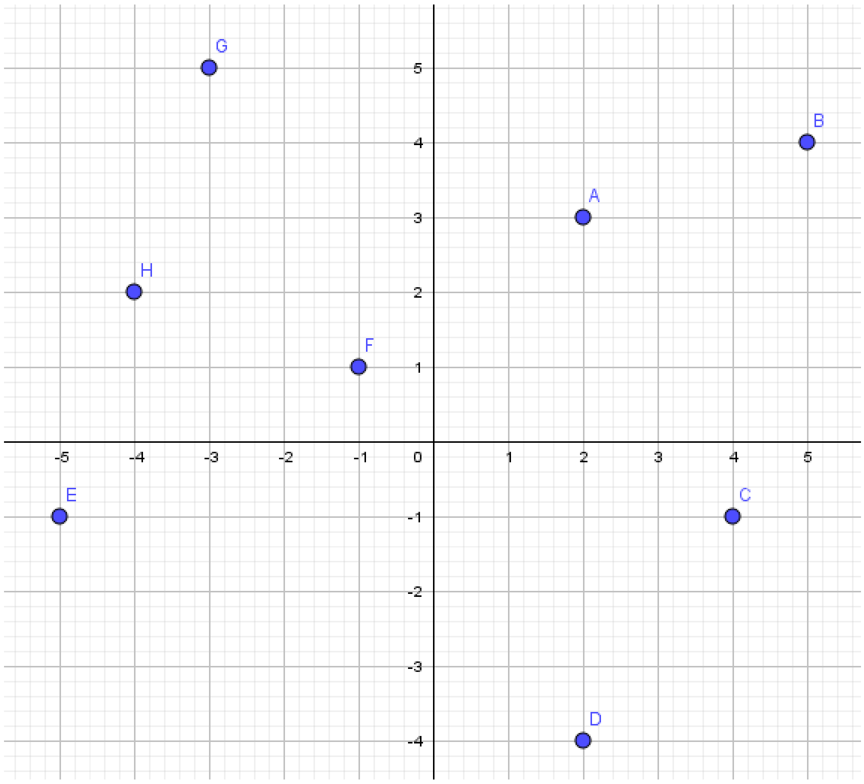
Fiche de préparation

Utilisation des coordonnées des vecteurs

Dessiner les vecteurs :
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{GH}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DF}$.

Pour aller de D à F, selon les abscisses on va 3 carreaux à gauche (sens négatif) et 5 carreaux vers le haut (sens positif) ainsi on a : $\overrightarrow{DF}\binom{-3}{5}$

Lire les coordonnées des vecteurs tracés et compléter : $\overrightarrow{AB}\left(\quad\right)$, $\overrightarrow{AC}\left(\quad\right)$, $\overrightarrow{DE}\left(\quad\right)$ et $\overrightarrow{EC}\left(\quad\right)$



Pour trouver les coordonnées d'un vecteur par le calcul on écrit les coordonnées du point d'arrivé et on leur retranche les coordonnées du point de départ :
$\overrightarrow{AB}\binom{x_B - x_A}{y_B - y_A} = \overrightarrow{AB}\binom{5-2}{4-3} = \overrightarrow{AB}\binom{3}{1}$,
Compléter :

$\overrightarrow{AC}\left(\qquad\quad\right) = \overrightarrow{AC}\left(\quad\right) =$, $\quad\overrightarrow{CF}\left(\qquad\quad\right) = \overrightarrow{CF}\left(\quad\right)$, $\quad\overrightarrow{GH}\left(\qquad\quad\right) = \overrightarrow{GH}\left(\quad\right)$,

et $\overrightarrow{EC}\left(\qquad\quad\right) = \overrightarrow{EC}\left(\quad\right)$

Normes de vecteurs

D'après le cours du début d'année dans un repère orthonormé la distance entre deux points $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ on reconnait à l'intérieur de la formule les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Ainsi si on a $\vec{u}\binom{x_u}{y_u}$ alors la distance couverte par le vecteur, autrement dit sa norme vaut $\|\vec{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$.
__Exemple :__ si on veut connaitre la distance DF dans le repère précédent, comme on sait que $\overrightarrow{DF}\binom{-3}{5}$ on écrira : $DF = \|\overrightarrow{DF}\| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

Déterminer les longueurs suivantes en vous aidant des coordonnées des vecteurs associés quand c'est possible

AC. ……

DE ……

GH ……

GD ……

……

BE ……

……

Opérations avec des vecteurs

Règles : quand on ajoute (ou on soustrait) deux vecteurs on ajoute (on soustrait) les coordonnées respectives :

Quand on multiplie un vecteur par un nombre k alors les coordonnées sont toutes multipliées par k

Reformulation avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ deux vecteurs et k un nombre $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}x_u+x_v\\y_u+y_v\end{pmatrix}$ et $(k\vec{u})\begin{pmatrix}k\,x_u\\k\,y_u\end{pmatrix}$

Sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\11\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

Donner les coordonnées des vecteurs :

$(\vec{u}+\vec{v})$ ……………………………………………………………………………………………………

$-8\,\vec{w}$ ……………………………………………………………………………………………………

$(\vec{w}-\vec{v})$ ……………………………………………………………………………………………………

$-2\,\vec{u}+3\,\vec{v}=$ ……………………………………………………………………………………………………

Vecteurs colinéaires ?

Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles (autrement dit si leur déterminant est nul). Rappel : avec $\vec{u}\begin{pmatrix}x_u\\y_u\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x_v\\y_v\end{pmatrix}$ on aura : $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\y_u & y_v\end{vmatrix}=x_uy_v-x_vy_u$

Exemple : $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ sont-ils colinéaires ?

$\det(\overrightarrow{DF};\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}-3 & 2\\5 & -4\end{vmatrix}=(-3)(-4)-5\times 2=2\neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

Question : soit $\vec{u}\begin{pmatrix}36\\-48\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$et $\vec{w}\begin{pmatrix}-15\\20\end{pmatrix}$, dire si ces vecteurs sont colinéaires ou pas

$\det(\vec{u};\vec{v})=$ ……………………………………………………………………………………………………

$\det(\vec{u};\vec{w})=$ ……………………………………………………………………………………………………

$\det(\vec{w};\vec{v})=$ ……………………………………………………………………………………………………

Droites parallèles / points alignés ?

Rappel : les droites (AB) et (CD) sont parallèles ⇔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

Les points A, B et C sont alignés ⇔ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires

<u>Exemple :</u> A(3 ;4), B(6 ;2), C(3 ;8), D(12 ;2), E(7 ;10) et F(9 ;4).

A, B et C sont-ils alignés ? puis (AB) et (CD) sont-ils parallèles

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6-3\\2-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3-3\\8-4\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=3\times 4-0(-2)=12\neq 0$ donc pas de colinéarité donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}12-3\\2-8\end{pmatrix}=\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}9\\-6\end{pmatrix}$ $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD})=3\times(-6)-9(-2)=0$ donc colinéarité donc (AB) // (CD).

Exercice : C, F et D sont-ils alignés ? (BF) et (CE) sont-ils parallèles ?

……

……

……

……

Bonus Round

Un point bien placé

Par le passé nous avons appris à placer des points en fonction de points et de vecteurs connus, par exemple avec A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dessiné sur un graphique on pouvait nous demandait de placer le point M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

Là, on doit savoir faire quelque chose d'analogue : sans dessin en connaissant les coordonnées de A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on peut nous demander celles de M tel que $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

<u>Exemple :</u> On sait que A(5 ;-3) , $\vec{u}\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}$, déterminer x et y tel que $M(x;y)$ vérifie $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v}$.

<u>Correction :</u> $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-5\\y-(-3)\end{pmatrix}$ et $(2\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix}2\times 7-5\\2\times 3-(-4)\end{pmatrix} = (2\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix}14-5\\6+4\end{pmatrix} = (2\vec{u}-\vec{v})\begin{pmatrix}9\\10\end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{AM} = 2\vec{u} - \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases}x-5=9\\y+3=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=9+5\\y=10-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=14\\y=7\end{cases}$ ainsi $M(14;7)$

<u>Exercice :</u>

Soit C(5 ;4) , $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\8\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$déterminer les coordonnées de N(x ;y) tel que

Dans le mile !

<u>Rappel :</u> soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points , alors I le milieu de $[AB]$ aura pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

<u>Exemple :</u> Trouver C(x ;y) l'image d'un point A(7 ;-4) par la symétrie centrale de centre B(-9 ;2).

<u>Correction :</u> Ça revient à trouver un point C tel que B soit le milieu de [AC] ainsi B aura pour coordonnées (-9 ;2) mais aussi : $\left(\frac{7+x}{2};\frac{-4+y}{2}\right) donc \begin{cases}-9=\frac{7+x}{2}\\2=\frac{-4+y}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-9\times 2=7+x\\2\times 2=-4+y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-18-7=x\\4+4=y\end{cases}$ ainsi $C(-25;8)$

<u>Exercice :</u>

Soit $R(-5;4)$ et $T(-6;7)$ deux points. Déterminer les coordonnées de W le symétrique de T par rapport à R.

Equations de droites

Trouver l'équation réduite de la droite passant par A et B deux points, c'est trouver les conditions sur les coordonnées $(x;y)$ d'un point M pour qu'il soit alignés avec A et B.

<u>Exemple :</u> Soit $R(-5;4)$ et $T(-6;7)$ deux points, déterminer l'équation de la droite (RT).

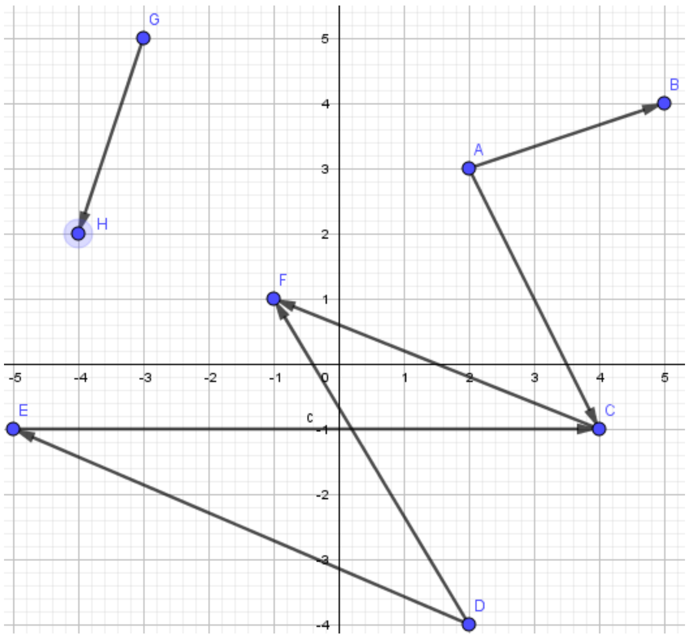
<u>Correction :</u> $\overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}-6-(-5)\\7-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{RT}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}x-(-5)\\y-4\end{pmatrix} = \overrightarrow{RM}\begin{pmatrix}x+5\\y-4\end{pmatrix}$

R, T et M alignés $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{RT};\overrightarrow{RM}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix}-1 & x+5\\3 & y-4\end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1(y-4)-(x+5)3=0 \Leftrightarrow -y+4-$ $(3x+15)=0 \Leftrightarrow -y+4-3x-15=0 \Leftrightarrow -3x-y-11=0$ (équation cartésienne)

$\Leftrightarrow -3x-11=y$ (Équation réduite)

<u>Exercice :</u>

Déterminer l'équation de la droite (PK) avec P(5 ;-7) et K(-2 ;-9)



Correction

Utilisation des coordonnées des vecteurs

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\-1-3\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-1-4\\1-(-1)\end{pmatrix}=\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$,
$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-4-(-3)\\2-5\end{pmatrix}=\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$
et $\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}4-(-5)\\-1-(-1)\end{pmatrix}=\overrightarrow{EC}\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix}$

Normes de vecteurs

AC= $\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{2^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

DE= $\|\overrightarrow{DE}\|=\sqrt{(-7)^2+3^2}=\sqrt{58}$

GH= $\|\overrightarrow{GH}\|=\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$

$GD=\sqrt{(2-(-3))^2+(-4-5)^2}=\sqrt{25+81}=\sqrt{106}$

BE= $\sqrt{(-5-5)^2+(-1-4)^2}=\sqrt{100+25}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

Opérations avec des vecteurs Sachant que $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\11\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ Donner les coordonnées de :

$(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}-3+9\\7+11\end{pmatrix}=(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}6\\18\end{pmatrix}$ $(-8\,\vec{w})\begin{pmatrix}(-8)1\\(-8)(-5)\end{pmatrix}=(-8\,\vec{w})\begin{pmatrix}-8\\40\end{pmatrix}$

$(\vec{w}-\vec{v})\begin{pmatrix}1-9\\-5-11\end{pmatrix}=(\vec{w}-\vec{v})\begin{pmatrix}-8\\-16\end{pmatrix}$ $(-2\,\vec{u}+3\,\vec{v})\begin{pmatrix}-2(-3)+3\times 9\\-2\times 7+3\times 11\end{pmatrix}=(-2\,\vec{u}+3\,\vec{v})\begin{pmatrix}33\\19\end{pmatrix}$

Vecteurs colinéaires ? Question : soit $\vec{u}\begin{pmatrix}36\\-48\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$et $w\begin{pmatrix}-15\\20\end{pmatrix}$, dire si ces vecteurs sont colinéaires ou pas

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix}36&2\\-48&3\end{vmatrix}=36\times 3-(-48)\times 2=204\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\det(\vec{u};\vec{w})=\begin{vmatrix}36&-15\\48&20\end{vmatrix}=36\times 20-(-48)\times(-15)=0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.

$\det(\vec{w};\vec{v})=\begin{vmatrix}-15&2\\20&3\end{vmatrix}=-15\times 3-20\times 2=-85\neq 0$ donc les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Droites parallèles / points alignés ? A(3 ;4), B(6 ;2), C(3 ;8), D(12 ;2), E(7 ;10) et F(9 ;4).

C, F et D sont-ils alignés ? $\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}6-3\\4-8\end{pmatrix}=\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ $\det(\overrightarrow{CF};\overrightarrow{CD})=3\times(-6)-9(-4)=-18+18=0$ donc les vecteurs sont colinéaires donc les droites (CD) et (CF) sont parallèles, et comme elles passent toutes deux par C elles sont confondues donc les trois points sont sur une même droite et donc ils sont alignés

(BF) et (CE) sont-ils parallèles ? $\det(\overrightarrow{BF};\overrightarrow{CE})=\begin{vmatrix}(9-6)&(7-3)\\(4-2)&(10-8)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\2&2\end{vmatrix}=3\times 2-4\times 2=-2\neq 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BF};\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires et donc les droites (BF) et (CE) ne sont pas parallèles.

Un point bien placé $\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}5-x\\4-y\end{pmatrix}$ et $(5\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}5\times(-2)+1\\5\times 8+3\end{pmatrix}=(5\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}-10+1\\40+3\end{pmatrix}=(5\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}-9\\43\end{pmatrix}$

Ainsi $\overrightarrow{NC}=5\vec{u}+\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=-9\\4-y=43\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5+9=x\\4-43=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}14=x\\-39=y\end{cases}$ ainsi $M(14;-39)$

Dans le mile ! Soit $R(-5;4)$ et $T(-6;7)$ deux points. Déterminer les coordonnées de W le symétrique de T par rapport à R.

Ça revient à trouver un point W tel que R soit le milieu de [TW] ainsi R aura pour coordonnées $(-5;4)$ mais aussi : $\left(\frac{-6+x}{2};\frac{7+y}{2}\right)$ *donc*

$\begin{cases}-5=\frac{-6+x}{2}\\4=\frac{7+y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\times 2=-6+x\\2\times 4=7+y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10+6=x\\8-7=y\end{cases}$ ainsi $W(-4;1)$

Equations de droites déterminer l'équation de la droite (PK) avec P(5 ;-7) et K(-2 ;-9)

P, K et M alignés $\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{PK};\overrightarrow{PM})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-7&x-5\\-2&y+7\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -7(y+7)-(x-5)(-2)=0\Leftrightarrow -7y-49-(-2x+10)=0\Leftrightarrow -7y-49+2x-10=0\Leftrightarrow 2x-7y-59=0$ (équation cartésienne) $\Leftrightarrow -7y=-2x+59\Leftrightarrow y=\frac{2}{7}x-\frac{59}{7}$ (équation réduite)