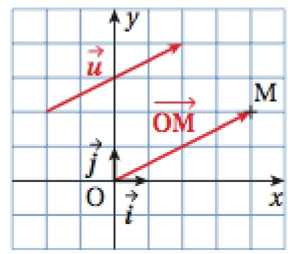
VECTEURS DANS UN REPERE

I. Coordonnées d'un vecteur

Définition : Soit M un point quelconque d'un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) et un vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.

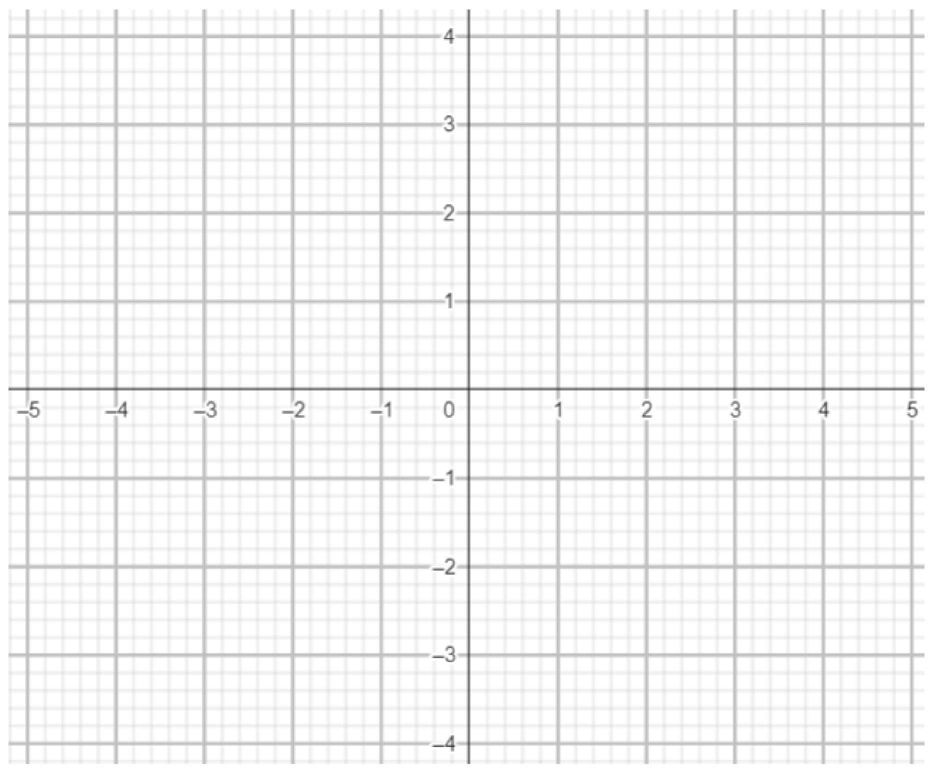


On note : $\vec{u}\ (x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Méthode 1 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Placer les points A(2 ;1), B$(5;3)$, C$(-1;-2)$, D(-2 ;3) , E(1 ;-4) et F$(4;-2)$
Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique

……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………



Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
Comme $-\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$ (voir propriété qui suit) et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Méthode 2 : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par calcul avec :
A(2 ;1), B$(5;3)$, C$(-1;-2)$, D(-2 ;3) , E(1 ;-4) et F$(4;-2)$.

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) et un réel k.
- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\binom{x+x'}{y+y'}$
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{kx}{ky}$

Remarque :
Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{x}{y}$ alors $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\binom{-x}{-y}$.

Méthode 3 : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

Méthode 4 : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle
Dans un repère, soit les points A$(1;2)$, B(-4 ;3) , C$(1;-2)$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

II. Colinéarité de deux vecteurs

1) Critère de colinéarité

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\binom{x}{y}$ et $\binom{x'}{y'}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration au programme :
- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.
Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.
Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.
Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$.
Comme on a déjà $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-7\end{pmatrix}$

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété :
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant
Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix}$

3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité
On considère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Soit A$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$ et E$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix}$.
1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.