Correction du Devoir maison n°3

Exercice 19P154

a) Le triangle BEA a son côté [AB] qui est un diamètre de son cercle circonscrit donc il est rectangle d'hypoténuse [AB]

b) Comme ABE est rectangle en E on a $(BE) \perp (AC)$, de plus on a $(BA) \perp (FC)$. (FC) et (BF) sont les hauteurs issues respectivement C et B du triangle ABC. F le point d'intersection de ces deux hauteurs sera donc l'orthocentre de ce triangle.

c) ABD est rectangle en D car son côté [AB] est un diamètre de son cercle circonscrit, de plus F étant l'orthocentre de ABC la droite (AF) est la hauteur de ABC issue de A et donc (AF) et (AD) sont deux droites perpendiculaires à (BC) et passant par le même point A, on peut donc en déduire qu'il s'agit de la même droite, ainsi A, F et D sont alignés.

d) ABC est isocèle en A donc la hauteur (AD) est aussi la médiatrice du côté opposé : [BC], or tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment, donc BF=FC et ainsi BFC est isocèle en F.

Exercice 27 P155

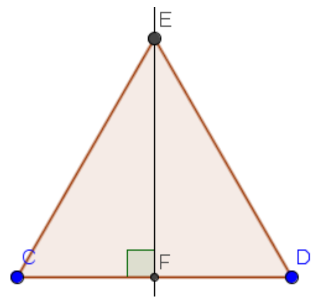
Dans le cercle $\mathcal{C}$ les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$ et donc ils sont égaux. Ainsi on a : $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 20°$

Dans CED la somme des mesures des angles vaut 180° et donc $\widehat{EDC} + \widehat{ECD} + \widehat{CED} = 180$

$\Leftrightarrow 20 + \widehat{ECD} + 120 = 180 \Leftrightarrow \widehat{ECD} = 180 - 20 - 120 \Leftrightarrow \widehat{ECD} = 40$

Exercice 110 P 166

On pose R le rayon des trois cercles. Le grand triangle équilatéral rouge sera de côté 2R, et ses angles seront tous de 60°. Il contiendra trois secteurs de cercle et un triangle curviligne.



Dans un triangle équilatéral CDE de côté 2R, la hauteur issue d'un sommet est confondue avec la médiane issue du même sommet ainsi $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}2R = R$

Ainsi dans ECF rectangle en F on a d'après le théorème de Pythagore l'égalité suivante : $EC^2 = CF^2 + FE^2$

$\Leftrightarrow EF^2 = EC^2 - CF^2 \Leftrightarrow EF^2 = (2R)^2 - R^2 \Leftrightarrow EF^2 = 3R^2$

Ainsi $EF = \sqrt{3}R$

L'aire du triangle rouge sera donc :

$\mathcal{A}_{rouge} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{(2R\times\sqrt{3}R)}{2} = \frac{2\sqrt{3}R^2}{2} = \sqrt{3}R^2$

Aire secteur	πR^2	$\pi R^2 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$
Angle	360	60

On sait que l'aire d'un secteur est proportionnelle à son angle ainsi

A eux trois les secteurs à l'intérieur du triangle rouge ont une aire de

$\mathcal{A}_{secteurs} = 3 \times \frac{\pi R^2}{6} = \frac{1}{2}\pi R^2$

L'aire du triangle curviligne sera donc de

$$\mathcal{A}_{curviligne} = \mathcal{A}_{rouge} - \mathcal{A}_{secteurs} = \sqrt{3}R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})R^2 = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{2}R^2$$

On veut $\mathcal{A}_{curviligne} \geq 100 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}R^2 \geq 100 \Leftrightarrow R^2 \geq \frac{200}{2\sqrt{3}-\pi} \Leftrightarrow R^2 - \frac{200}{2\sqrt{3}-\pi} \geq 0$

$\Leftrightarrow R^2 - \sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(R - \sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}\right)\left(R + \sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}\right) \geq 0$

un tableau de signe nous donnerait comme solutions : $S =]-\infty; -\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}] \cup [\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}; +\infty[$ or une longueur ne peut être que positive donc les mesures de côté en mètre permettant d'avoir une aire du triangle curviligne supérieure à $100m^2$ R doit être dans $[\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}; +\infty[$ (pour info $\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}} \approx 24{,}9$)

Correction du Devoir maison n°3

Exercice 19P154

a) Le triangle BEA a son côté [AB] qui est un diamètre de son cercle circonscrit donc il est rectangle d'hypoténuse [AB]
b) Comme ABE est rectangle en E on a $(BE) \perp (AC)$, de plus on a $(BA) \perp (FC)$. (FC) et (BF) sont les hauteurs issues respectivement C et B du triangle ABC. F le point d'intersection de ces deux hauteurs sera donc l'orthocentre de ce triangle.
c) ABD est rectangle en D car son côté [AB] est un diamètre de son cercle circonscrit, de plus F étant l'orthocentre de ABC la droite (AF) est la hauteur de ABC issue de A et donc (AF) et (AD) sont deux droites perpendiculaires à (BC) et passant par le même point A, on peut donc en déduire qu'il s'agit de la même droite, ainsi A, F et D sont alignés.
d) ABC est isocèle en A donc la hauteur (AD) est aussi la médiatrice du côté opposé : [BC], or tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment, donc BF=FC et ainsi BFC est isocèle en F.

Exercice 27 P155

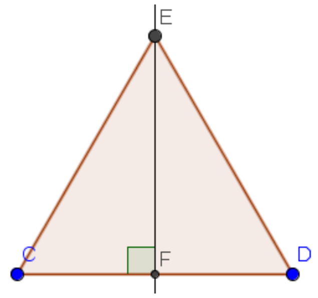
Dans le cercle $\mathcal{C}$ les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ interceptent le même arc $\widehat{AC}$ et donc ils sont égaux. Ainsi on a : $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 20°$

Dans CED la somme des mesures des angles vaut 180° et donc $\widehat{EDC} + \widehat{ECD} + \widehat{CED} = 180$

$\Leftrightarrow 20 + \widehat{ECD} + 120 = 180 \Leftrightarrow \widehat{ECD} = 180 - 20 - 120 \Leftrightarrow \widehat{ECD} = 40$

Exercice 110 P 166

On pose R le rayon des trois cercles. Le grand triangle équilatéral rouge sera de côté 2R, et ses angles seront tous de 60°. Il contiendra trois secteurs de cercle et un triangle curviligne.



Dans un triangle équilatéral CDE de côté 2R, la hauteur issue d'un sommet est confondue avec la médiane issue du même sommet ainsi $CF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}2R = R$

Ainsi dans ECF rectangle en F on a d'après le théorème de Pythagore l'égalité suivante : $EC^2 = CF^2 + FE^2$

$\Leftrightarrow EF^2 = EC^2 - CF^2 \Leftrightarrow EF^2 = (2R)^2 - R^2 \Leftrightarrow EF^2 = 3R^2$

Ainsi $EF = \sqrt{3}R$

L'aire du triangle rouge sera donc :

$\mathcal{A}_{rouge} = \frac{base \times hauteur}{2} = \frac{(2R \times \sqrt{3}R)}{2} = \frac{2\sqrt{3}R^2}{2} = \sqrt{3}R^2$

Aire secteur	πR^2	$\pi R^2 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi R^2}{6}$
Angle	360	60

On sait que l'aire d'un secteur est proportionnelle à son angle ainsi A eux trois les secteurs à l'intérieur du triangle rouge ont une aire de

$\mathcal{A}_{secteurs} = 3 \times \frac{\pi R^2}{6} = \frac{1}{2}\pi R^2$

L'aire du triangle curviligne sera donc de

$$\mathcal{A}_{curviligne} = \mathcal{A}_{rouge} - \mathcal{A}_{secteurs} = \sqrt{3}R^2 - \frac{1}{2}\pi R^2 = (\sqrt{3} - \frac{\pi}{2})R^2 = \frac{2\sqrt{3} - \pi}{2}R^2$$

On veut $\mathcal{A}_{curviligne} \geq 100 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}R^2 \geq 100 \Leftrightarrow R^2 \geq \frac{200}{2\sqrt{3}-\pi} \Leftrightarrow R^2 - \frac{200}{2\sqrt{3}-\pi} \geq 0$

$\Leftrightarrow R^2 - \sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(R - \sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}\right)\left(R + \sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}\right) \geq 0$

un tableau de signe nous donnerait comme solutions : $S =]-\infty; -\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}] \cup [\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}; +\infty[$ or une longueur ne peut être que positive donc les mesures de côté en mètre permettant d'avoir une aire du triangle curviligne supérieure à $100m^2$ R doit être dans $[\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}}; +\infty[$ (pour info $\sqrt{\frac{200}{2\sqrt{3}-\pi}} \approx 24{,}9$)