NOMBRES RÉELS

I. Nombres décimaux, nombres rationnels

1. Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec a entier et p entier naturel.
Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$**.**

Exemples : 0,56 $\in \mathbb{D}$ 3 $\in \mathbb{D}$ $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$

Démonstration au programme :
Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal :

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.
Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Alors il s'écrit sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

2. Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$**.**

Exemples : $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$ 4 $\in \mathbb{Q}$ -4,8 $\in \mathbb{Q}$ $\sqrt{\mathbf{2}} \notin \mathbb{Q}$**.**

Démonstration au programme :
Démontrons que le nombre rationnel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel (voir fiche d'activité sur le cahier d'exercice) :

II. Notions de nombres réels

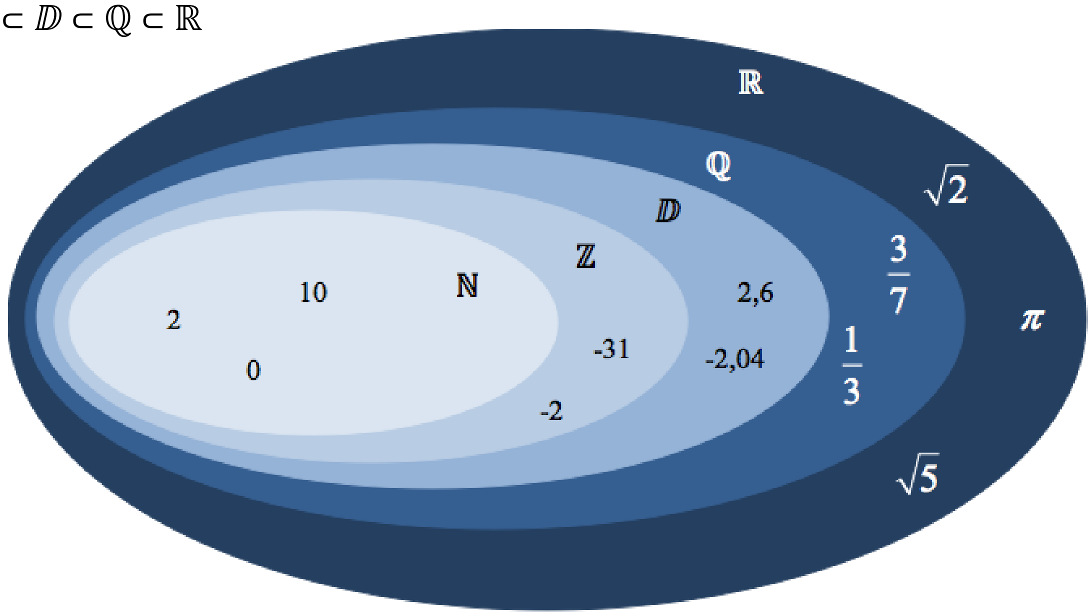
1. Définition

Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$**.**
C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.

Exemples :
2, 0, -5, 0.67, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

2. Classification des nombres

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On a également les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



3. Les nombres irrationnels

Définition : Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs, b non nul.

Comme pour un nombre rationnel, il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. En effet, le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ces décimales se suivent sans suite logique.

Bonus : Démonstration au programme : Irrationalité de $\sqrt{3}$

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{3}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\sqrt{3}$ est un rationnel.
Il s'écrit alors $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 3$ soit $a^2 = 3b^2$.

On en déduit que a^2 est divisible par 3 , ce qui entraîne que a est divisible par 3. (c'est démontrable par l'absurde : si a n'est pas divisble par 3 alors $a = 3n + r$ avec n et r deux entier et $r = 1 \; ou \; 2$, ainsi $a^2 = (3n + r)^2 = 3^2n^2 + 2 \times 3n \times r + r^2 = 3(3n^2 + 2nr) + r^2$ or $r^2 = 2^2 = 4$ ou $r^2 = 1^2 = 1$ donc dans les deux cas a^2 n'est pas divisible par 3, donc contradiction donc a est nécessairement divisible par 3.
Puisque a est un multiple de 3, il existe un entier naturel k tel que $a = 3k$.
Comme, $a^2 = 3b^2$

On a : $(3k)^2 = 3b^2$ Soit : $9k^2 = 3b^2$

Soit encore $b^2 = 3k^2$.

On en déduit que b^2 est un multiple de 3, ce qui entraîne que b est aussi un multiple de 3.
Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être tous les deux multiples de 3. On aboutit à une absurdité.
Donc, $\sqrt{3}$ n'est pas un rationnel.
Et donc, $\sqrt{3}$ est un irrationnel.

Méthode : Donner un encadrement d'un nombre réel

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

La calculatrice affiche des valeurs approchées :

On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

Fiches méthode : Simplifications de racines

Rappel :

Pour peu que $a \geq 0$ et $b \geq 0$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

Pour peu que $a \geq 0$ et $b > 0$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Racine isolé

Je décompose le radicande sous forme de produit de facteurs premier, ou de carré s'ils sont apparents. Après un regroupement je sors tous les nombre au carrés de la racine (il perdront leur exposant en sortant)

$$\sqrt{588} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 7^2}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3 \times 7^2} = 2 \times 7\sqrt{3}$$
$$= 14\sqrt{3}$$

Produit de racines

La propriété « le produit de deux racines est la racine du produit » permet de faire la fusion, pour terminer la simplification on se réfèrera au cas précédent.

$$\sqrt{60}\sqrt{231} = \sqrt{60 \times 231}$$
$$= \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 7 \times 11}$$
$$= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11}$$
$$= 2 \times 3\sqrt{5 \times 7 \times 11} = 6\sqrt{385}$$

Quotient de racines

Deux cas :

1) Si la racine du dénominateur est isolée ou si elle est un facteur, alors on multipliera le numérateur et dénominateur par cette racine. Simplification instantanée au dénominateur, au numérateur on utilisera la démarche décrit à « produit de racines »

$$\frac{7\sqrt{50}}{2\sqrt{45}} = \frac{7\sqrt{50}\sqrt{45}}{2\sqrt{45}\sqrt{45}} = \frac{7\sqrt{50\times45}}{2\times45}$$
$$= \frac{7\sqrt{2\times5^2\times5\times3^2}}{90} = \frac{7\times5\times3\sqrt{2\times5}}{90}$$
$$= \frac{7\times5\times3\sqrt{10}}{3\times3\times5\times2} = \frac{7\sqrt{10}}{3\times2} = \frac{7\sqrt{10}}{6}$$

2) si la racine du dénominateur est impliquée dans une addition ou une soustraction, on va compléter le dénominateur pour obtenir l'identité remarquable (a+b)(a-b) en le multipliant par la quantité conjuguée du dénominateur (pour compenser on multipliera aussi le numérateur par la même expression)

$$\frac{5-3\sqrt{2}}{3-\sqrt{10}} = \frac{\left(5-3\sqrt{2}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)}{\left(3-\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)}$$
$$= \frac{15+5\sqrt{10}-9\sqrt{2}-3\sqrt{2}\sqrt{10}}{3^2-\sqrt{10}^2}$$
$$= \frac{15+5\sqrt{10}-9\sqrt{2}-3\sqrt{2\times10}}{9-10}$$
$$= \frac{15+5\sqrt{10}-9\sqrt{2}-3\sqrt{2^2 5}}{-1}$$
$$= \frac{15+5\sqrt{10}-9\sqrt{2}-3\times2\sqrt{5}}{-1}$$
$$= -15 - 5\sqrt{10} + 9\sqrt{2} + 6\sqrt{5}$$