Exercice 72P54

$N_1 = 27$ et $N_2 = 72$ ainsi $N_1 + N_2 = 99$

Ce nombre est divisible par 1, 3, 9 ,11, 33 et 99

$N_1 = 96$ et $N_2 = 69$ ainsi $N_1 + N_2 = 165$

Ce nombre est divisible par 1, 3,5, 11, 15,33,55 et 165

$N_1 = 14$ et $N_2 = 41$ ainsi $N_1 + N_2 = 55$

Ce nombre est divisible par 1, 5, 11, et 55

$N_1 = 48$ et $N_2 = 84$ ainsi $N_1 + N_2 = 132$

Ce nombre est divisible par 1, 2, 3,4,6, 11,12, 22, 33, 44,66, 132

Il semblerait que la somme obtenue soit toujours divisible par 11.

Démonstration

N_1 peut être écrit : $N_1 = 10a + b$ avec a deux entiers naturels entre 1 et 9 et b un entier naturel entre 0 et 9.

On aura donc $N_2 = 10b + a$

Ainsi $N_1 + N_2 = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b) = 11k$ avec $k = a + b$ un entier, ainsi $N_1 + N_2$ est un entier divisible par 11.

Exercice 73P54

A l'aide d'Excel j'ai cherché à regarder les premiers nombres écrits sous la forme $2^{2^n} + 1$

Les valeurs sont rapidement très grandes et à partir de n=10 elles dépassent les capacités de calcul et affichage d'Excel, donc on ne peut même pas avoir un ordre de grandeur des valeurs obtenues.

n	2^n	2^(2^n)+1
0	1	3
1	2	5
2	4	17
3	8	257
4	16	65537
5	32	4294967297
6	64	1,84467E+19
7	128	3,40282E+38
8	256	1,15792E+77
9	512	1,3408E+154
10	1024	#NOMBRE!
11	2048	#NOMBRE!
12	4096	#NOMBRE!

1) D'après wikipedia cette propriété

est fausse car à partir de $n = 5$ jusqu'à $n = 32$ on aura des nombres composés.

2) L'algorithme qui est proposé est censé donner le premier nombre divisant F,
   a. comme F est un nombre entier fini, au pire, faute de mieux, il est lui-même son diviseur et donc la boucle s'arrêtera quand N vaudra F.
   b. d'après wikipedia F n'étant pas premier, le programme va afficher un autre diviseur que F.

En utilisant Repl.it on peut faire le programme et on obtient alors :

```
F=2**(2**5)+1
N=2
while F%N!=0 :
    N=N+1
print(N)
```

```
641
>
```

On vient de prouver que la conjecture de Fermat est fausse et que si $n = 5$ alors 2^{2^n} est divisible par 641 (et donc n'est pas premier)

Remarque : pour tester une égalité on utilise le symbole == , pour tester que deux quantités ne sont pas égales on utilisera le symbole != (qui veut dire $\neq$)

Exercice 74P54

1)

4 a pour diviseur premier : 2 , or 4 est bien divisible par $2^2 = 4$, donc 4 est un nombre puissant.

6 a pour diviseur premier 2 et 3 or 6 n'est ni divisible par $2^2 = 4$ ni par $3^2 = 9$ donc il n'est pas premier.

12 a pour diviseur premier 2 et 3 or 6 et s'il est divisible par $2^2 = 4$, il ne l'est pas par $3^2 = 9$ donc il n'est pas premier.

2) 8 et 9 sont des nombre puissants et de plus ils sont consécutifs donc on a bien deux entiers consécutifs puissants inférieurs à 10.

3) soit n un carré parfait, alors on peut l'écrire $n = p^2$ avec p un entier. Si p est premier alors n étant divisible par p^2 il est divisible par tous les carrés des premiers le divisant (il n'y en a qu'un seul)

Si p n'est pas premier alors pour tout nombre w premier divisant n, il divisera aussi p[1] et donc $p = w \times h$ avec h un entier et donc $n = w^2h^2$ donc n est divisible par w^2 ainsi tout nombre premier divisant n, aura un carré qui divisera aussi n.

4) si pour tous diviseur p_i premier, la puissance p_i est plus grande que 2, alors n étant divisible par $p_i^{n_i}$ il le sera aussi par p_i^2 et donc n est puissant.
Dans le cas contraire :
Supposons que $n = p_1^{n_1} \times p_2^{n_2} \times p_3^{n_3} \times \ldots\ p_N^{n_N}$ soit puissant, alors pour tout diviseur p_i premier avec i entre 1 et N, n est divisible par p_i^2, donc $p_i^{n_i}$ est divisible par p_i^2 donc $n_i \geq 2$

5)

n	décomposition
2	2^1
3	3^1
4	2^2
5	5^1
6	$2^1 3^1$
7	7^1
8	2^3
9	3^2
10	$2^1 5^1$
11	11^1
12	$2^2 3^1$
13	13^1
14	$2^1 7^1$
15	$3^1 5^1$
16	2^4
17	17^1
18	$2^1 3^2$
19	19^1
20	$2^2 5^1$
21	$3^1 7^1$
22	$2^1 11^1$
23	23^1
24	$2^3 3^1$
25	5^2
26	$2^1 13^1$
27	3^3
28	$2^2 7^1$
29	29^1
30	$2^1 5^1 3^1$
31	31^1
32	2^5
33	$3^1 11^1$
34	$2^1 17^1$
35	$7^1 5^1$
36	$2^2 3^2$
37	37^1
38	$2^1 19^1$
39	$3^1 13^1$
40	$2^3 5^1$
41	41^1
42	$2^1 3^1 7^1$
43	43^1
44	$2^2 11^1$
45	$3^2 5^1$
46	$2^1 13^1$
47	47^1
48	$2^4 3^1$
49	7^2
50	$2^1 5^2$

[1] Pas vu en classe.

Exercice 81 P 55

	2	3		5		7		9	
11		13		15		17		19	
21		23		25		27		29	
31		33		35		37		39	
41		43		45		47		49	
51		53		55		57		59	
61		63		65		67		69	
71		73		75		77		79	
81		83		85		87		89	
91		93		95		97		99	

1) Couple de Nombres premiers ayant deux d'écart :
5 et 7 , 11 et 13 , 17 et 19, 41 et 43 , 59 et 61, 71 et 73

2) soit le nombre pair est 2 soit il ne l'est pas
S'il est 2 alors les nombres ayant 2 de différence avec lui sont 0 et 4 , or aucun de ces deux nombre n'est premier, donc ce n'est pas un bon candidat.
S'il n'est pas 2, alors non seulement ce nombre est divisible par 1 et lui même comme tout nombre entier non nul mais en plus sa parité le rend divisible par 2 , donc il n'est pas premiers.
Ainsi les nombres d'un couple de premiers jumeaux ne peuvent être pairs et ils sont donc impairs

3) a)
Notre but est de montrer que des deux formules $p = 6q + 1$ et $p = 6q + 5$ seule la première est valable.
Montrons que la seconde ne convient pas :
si $p = 6q + 5$ alors l'autre nombre premier du couple sera
$p - 2 = 6q + 5 - 2 = 6q + 3 = 3(2q + 1)$
ainsi $p - 2$ est un nombre divisible par 3 , qui en plus est supérieur à $6 - 2 = 4$ donc ce n'est pas 3, or un nombre divisible par 3 qui n'est pas 3 n'est pas premier. Ainsi $p - 2$ n'est pas premier ce qui est une contradiction évidente avec les informations de mon point de départ.
Conclusion : on ne peut avoir $p = 6q + 5$ et donc notre nombre p vérifie $p = 6q + 1$.

La technique de démonstration utilisée s’appelle démonstration par l’absurde.
Elle suit le déroulement suivant :

1) On veut montrer qu’une propriété n’est pas vraie
2) On suppose qu’elle est vraie.
3) Et on regarde les conséquences…
4) Jusqu’à trouver une contradiction (Ce qui prouve que notre supposition est nécessairement fausse).
5) On conclue : « donc par l’absurde notre proposition est fausse »

b) en prenant $k = 0$ on aura $p = 6k + 1 = 1$ et $p - 2 = -1$
en prenant $k = 4$ on aura $p = 6k + 1 = 25$ et $p - 2 = 23$
on a donc ici deux contre exemples et donc la formule ne marche pas tout le temps.
Ainsi, si deux nombres sont premiers et jumeaux alors on peut les écrire sous la forme $p = 6k + 1$ et $p - 2$ mais la réciproque n’est pas vraie.