

LES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

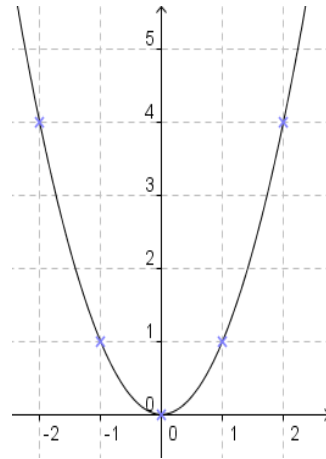
I. Fonction carré

1. Définition

La **fonction carré** f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

2. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :

- Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carré n'est donc pas une fonction linéaire.
- Dans un repère (O, I, J) , la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est appelée une **parabole** de sommet O .
- Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^2$ de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

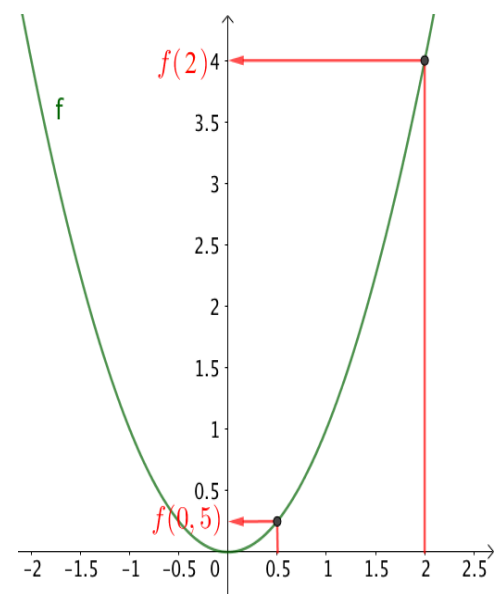
Méthode : Comparer des images

▶ Vidéo <https://youtu.be/-d3fE8d0YOc>

On a représenté graphiquement la fonction carré f dans un repère.

- a) Comparer graphiquement les nombres $f(0,5)$ et $f(2)$.
b) Même question avec $f(-1,5)$ et $f(-1)$.
- Vérifier par calcul le résultat de la question 1b.

- a) En traçant les images de 0,25 et de 2 par la fonction f , on constate que $f(0,5) < f(2)$.



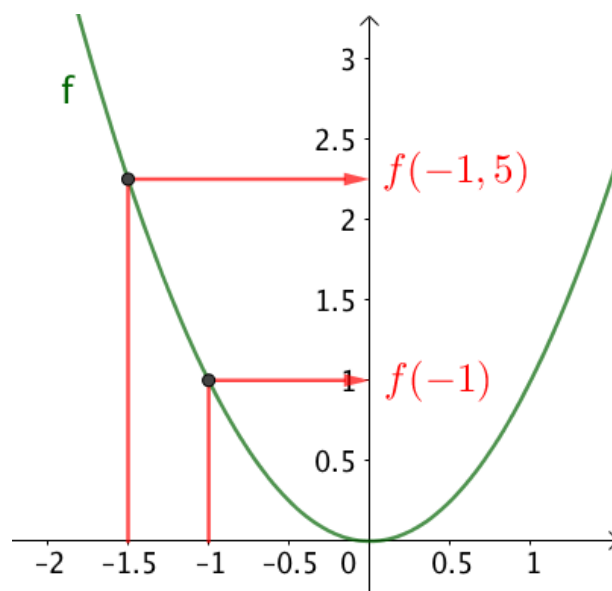
b) En traçant les images de $-1,5$ et de -1 par la fonction f , on constate que $f(-1) < f(-1,5)$.

2) On a $f(x) = x^2$.

$$\text{Ainsi : } f(-1,5) = (-1,5)^2 = 2,25.$$

$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

On en déduit que $f(-1) < f(-1,5)$.



II. Fonction inverse

1. Définition

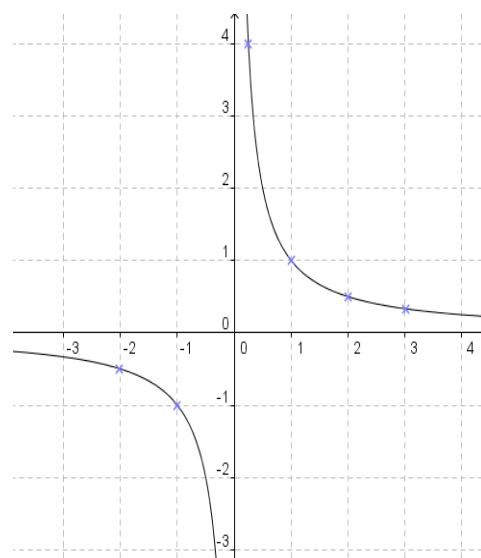
La **fonction inverse** f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Remarques :

- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$. On peut aussi noter cet ensemble \mathbb{R}^* .
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



Remarques :

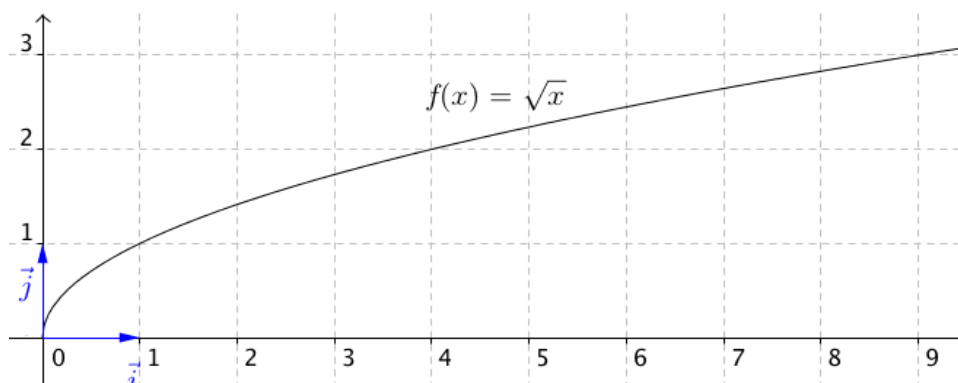
- Dans un repère (O, I, J) , la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est une **hyperbole** de centre O .
- La courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.

III. Fonction racine carrée

1. Définition

Définition : La **fonction racine carrée** est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

2. Représentation graphique

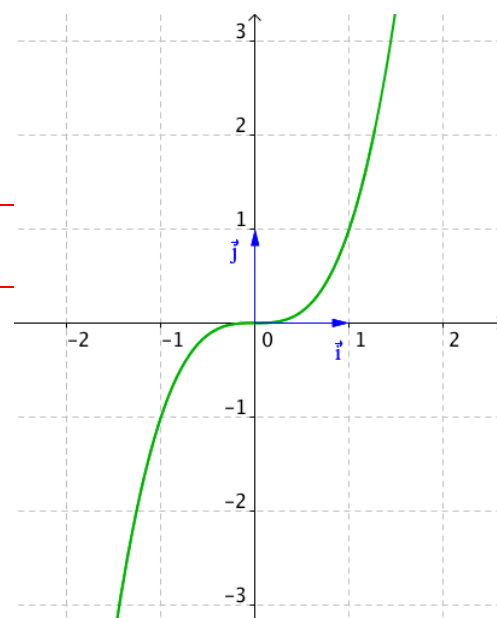


Remarque : La fonction racine carrée n'est pas définie pour des valeurs négatives.

IV. Fonction cube

1. Définition

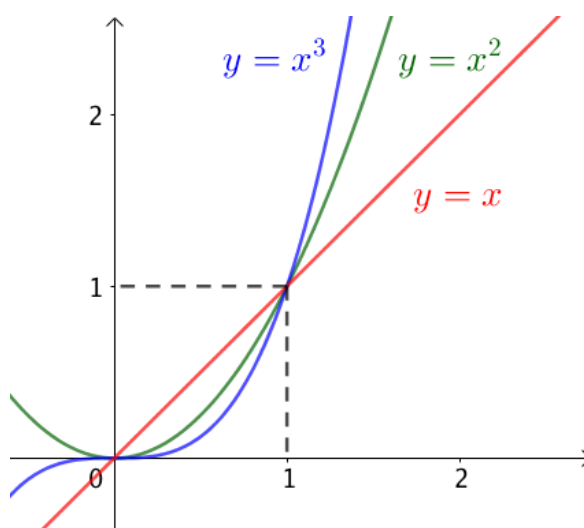
Définition : La **fonction cube** est la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^3$.



2. Représentation graphique

Remarque : Dans un repère orthogonal, la courbe d'équation $y = x^3$ de la fonction cube est symétrique par rapport au centre du repère.

3. Positions relatives des courbes d'équations : $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$



Pour des valeurs positives de x , on a :

- Si $x \geq 1$: La courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$ qui se trouve elle-même au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.
- Si $0 \leq x \leq 1$: L'ordre précédent est inversé.

Démonstration au programme :

▶ Vidéo <https://youtu.be/op54acayjIQ>

1^{er} cas : si $x \geq 1$:

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x$ et $y = x^2$, il suffit d'étudier le signe de $x^2 - x$.

Or, $x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.

Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x$.

- Pour étudier les positions relatives des courbes d'équations $y = x^2$ et $y = x^3$, il suffit d'étudier le signe de $x^3 - x^2$.

Or, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \geq 0$ car $x \geq 1$.

Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve au-dessus de la courbe d'équation $y = x^2$.

2^e cas : si $0 \leq x \leq 1$:

- Dans ce cas, $x^2 - x = x(x - 1) \leq 0$ car $x \geq 0$ et $x - 1 \leq 0$.

Donc, la courbe d'équation $y = x^2$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x$.

- Et, $x^3 - x^2 = x^2(x - 1) \leq 0$ car $x - 1 \leq 0$.

Donc la courbe d'équation $y = x^3$ se trouve en dessous de la courbe d'équation $y = x^2$.

V. Fonction paire, impaire

1. Fonction paire

Définition : Une fonction f est **paire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

Traduction géométrique :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

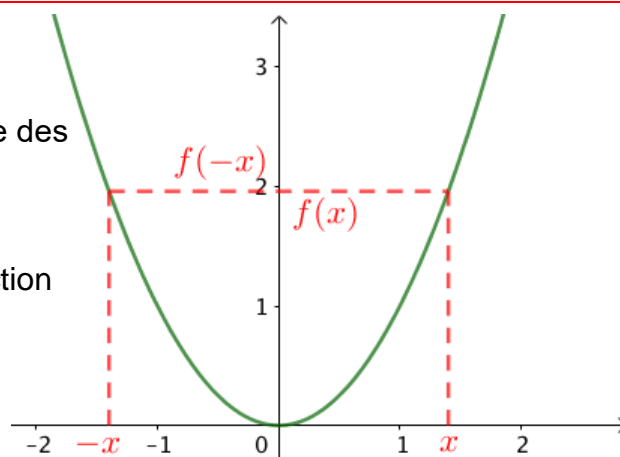
Exemple :

La fonction carré (représentée ci-contre) est une fonction paire.

En effet :

Si $f(x) = x^2$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

Donc $f(-x) = f(x)$.



Lorsqu'on trace la fonction carré, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Fonction impaire

Définitions : Une fonction f est **impaire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

Traduction géométrique :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples :

- La fonction cube (représentée ci-contre) est une fonction impaire.

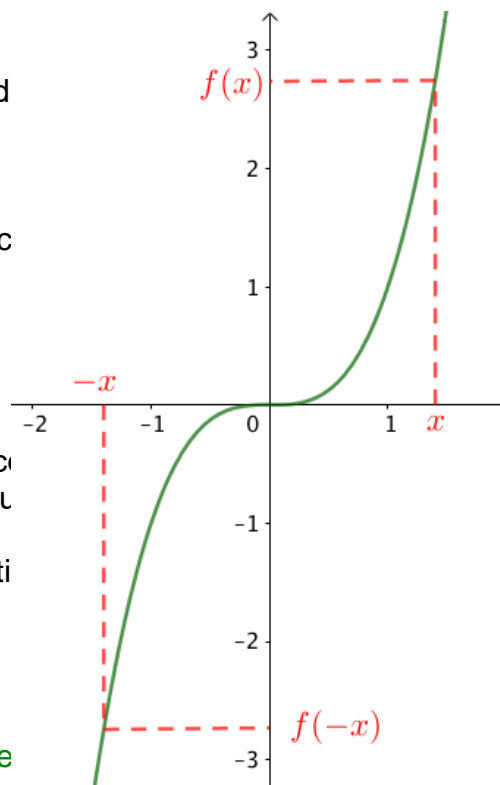
En effet :

Si $f(x) = x^3$, on a : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Donc $f(-x) = -f(x)$.

Lorsqu'on trace la fonction cube, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

- On peut démontrer de la même manière que la fonction carré est paire.



Méthode : Étudier la parité d'une fonction (non exigible)

📺 Vidéo <https://youtu.be/ohel-ZQYAy4>

Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 + 3$ est paire.

Pour tout x réel, on a :

$$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3$$

On a donc $f(-x) = f(x)$

La fonction f est donc paire. Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

