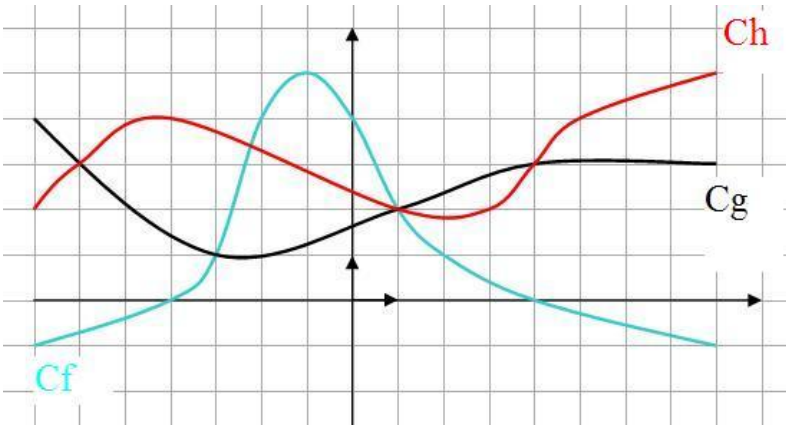
Devoir maison (généralités sur les fonctions)

Exercice 1



Soit f, g et h trois fonctions définies sur $[-7; 8]$

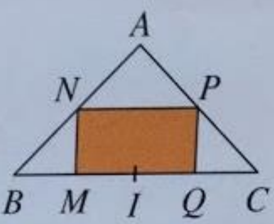
1) déterminer les images de -7 ; -3 ; 2 et 8 par la fonction f
2) déterminer les antécédents de 6 ; 5 ;4 et 2 par la fonction h
3) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$f(x) < g(x)$$
$$f(x) = 0$$
$$g(x) < h(x)$$
$$f(x) \geq h(x)$$

Exercice 2

98 Étude d'une surface

Sur la figure ci-contre, le triangle ABC est rectangle et isocèle en A.
On donne $BC = 9$.
Soit I le milieu de $[BC]$.
Le point M appartient au segment $[BI]$.
Le quadrilatère $MQPN$ est un rectangle où N est un point du segment $[AB]$, P un point du segment $[AC]$ et Q un point du segment $[IC]$.



1. a. Démontrer que $MN = BM$.
b. Prouver que $BM = QC$.
2. On pose $BM = x$.
a. Pourquoi le réel x appartient-il à l'intervalle $[0 ; 4{,}5]$?
b. Exprimer les dimensions MQ et MN en fonction de x.
c. Démontrer que l'aire du rectangle $MQPN$, notée $f(x)$, s'écrit $f(x) = 9x - 2x^2$.
3. Justifier que pour tout réel $x \in [0 ; 4{,}5]$, on a :

$$f(x) - 7 = (1 - x)(2x - 7)$$

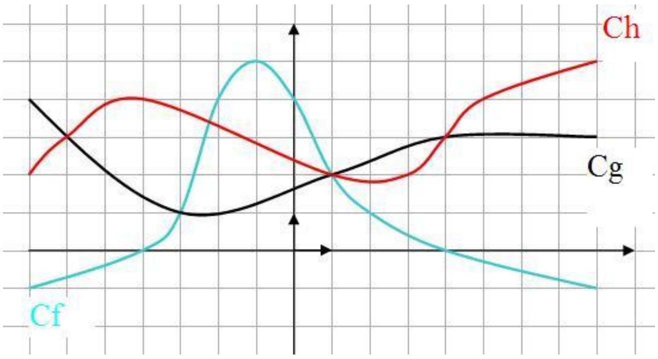
En déduire les positions du point M sur le segment $[BI]$ de sorte que l'aire du quadrilatère $MNPQ$ soit supérieure ou égale à 7.

Exercice 3

73question 1 et 74P263

Correction

Exercice 1



1) déterminer les images

$f(-7) = -1$ $\quad f(-3) = 1$

$f(2) = 1$ $\quad f(8) = -1$

2) déterminer les antécédents

antécédents de 6 par h : il n'y en a pas

antécédents de 5 par h : 8

antécédents de 4 par h : α,-4 et 5 (avec $-5 < \alpha < -4$)

antécédents de 2 par h : -7, 1 et 3

3) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$f(x) = 0 \quad S = \{-4; 4\}$

$f(x) \geq h(x) \quad S = [\delta; 1]$ avec $-3 \leq \delta \leq -2$

$f(x) < g(x) \quad S = [-7; -3[\cup]1; 8]$

$g(x) < h(x) \quad S =]-6; 1[\cup]4; 8]$

Exercice 2

1a. Comme ABC est rectangle et isocèle on aura $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45°$

Dans BMN rectangle en M on a $\widehat{NBM} = 45°$ et donc $\widehat{MNM} = 180 - \widehat{NBM} - \widehat{NMN} = 180 - 45 - 45 = 45°$

BMN est donc isocèle en M et donc MN=BM

b. de la même manière on peut montrer que PQ=QC or MNPQ est une rectangle et donc MN=PQ et ainsi BM=QC

2. a. le point M se situe sur (BC) entre B et I, or I est le milieu de $[BC]$ donc $BI = 4{,}5$

on aura donc la distance entre B et M qui va varier entre 0 (le point M est sur B) et 4,5 il est sur I.

b. $MQ = BC - BM - QC = 9 - x - x = 9 - 2x$

$MN = BM = x$

c. L'aire recherchée est $f(x) = MN \times NQ = x(9 - 2x) = 9x - 2x^2$

3.

$f(x) - 7 = 9x - 2x^2 - 7$

$(1 - x)(2x - 7) = 2x - 7 - x2x + 7x = -2x^2 + 9x - 7 = f(x) - 7$

On veut $f(x) \geq 7 \Leftrightarrow f(x) - 7 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x)(2x - 7) \geq 0$

Tableau de signe

x	$-\infty$		1		$7/2$		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x-7$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	

$1 - x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x$ $\qquad 2x - 7 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq 7 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{2}$

Interprétation : $S = \left[1; \frac{7}{2}\right]$

Exercice 3

73.1 $\quad \frac{3x+2}{2-x} < 5$

Recherche du domaine d'étude

$2 - x = 0 \Leftrightarrow 2 = x$

$\frac{3x+2}{2-x} < 5 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{2-x} - \frac{5(2-x)}{1(2-x)} < 0 \Leftrightarrow \frac{3x+2-(10-5x)}{2-x} < 0 \Leftrightarrow \frac{8x-8}{2-x} < 0$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$8x-8$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Q		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

Préparation du tableau de signes

$2 - x \geq 0 \Leftrightarrow 2 > x$

$8x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 8x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 1$

74.1 $\quad \frac{x^2+2x}{x+3} \geq x$

Recherche du domaine d'étude : $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

$\frac{x^2+2x}{x+3} \geq x \Leftrightarrow \frac{x^2+2x}{x+3} - \frac{x(x+3)}{1(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+2x-(x^2+3x)}{x+3} \geq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-x}{x+3} \geq 0$

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
Q		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Préparation du tableau de signes

$-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

74.2 $\frac{2x-1}{x+3} + \frac{3x}{x-3} \leq \frac{(2x^2+3)}{x^2-9} \Leftrightarrow$

Recherche du domaine d'étude :

$x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$

$x-3=0 \Leftrightarrow x=+3$

$x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2-3^2=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow x-3=0$ ou $x+3=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=-3$

$D_e = \mathbb{R} - \{-3;3\}$

$\frac{2x-1}{x+3} + \frac{3x}{x-3} \leq \frac{(2x^2+3)}{x^2-9} \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+3} + \frac{3x}{x-3} - \frac{(2x^2+3)}{(x-3)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{3x(x+3)}{(x-3)(x+3)} - \frac{(2x^2+3)}{(x-3)(x+3)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)(x-3)+3x(x+3)-(2x^2+3)}{(x+3)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(2x^2-6x-x+3)+(3x^2+9x)-(2x^2+3)}{(x+3)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-6x-x+3+3x^2+9x-2x^2-3}{(x+3)(x-3)} \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{3x^2+2x}{(x+3)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x(3x+2)}{(x+3)(x-3)} \leq 0$

Préparation du tableau de signes

$x \geq 0$

$3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow 3x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{2}{3}$

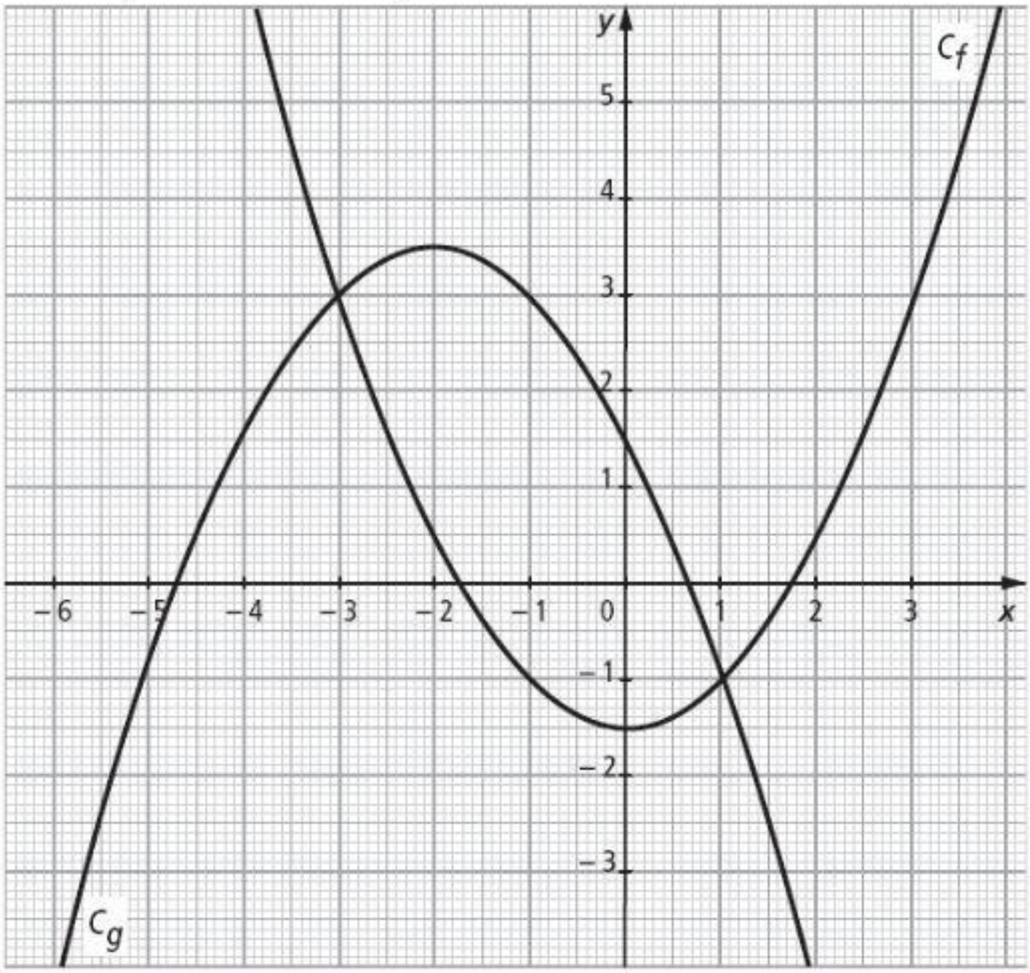
$x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$

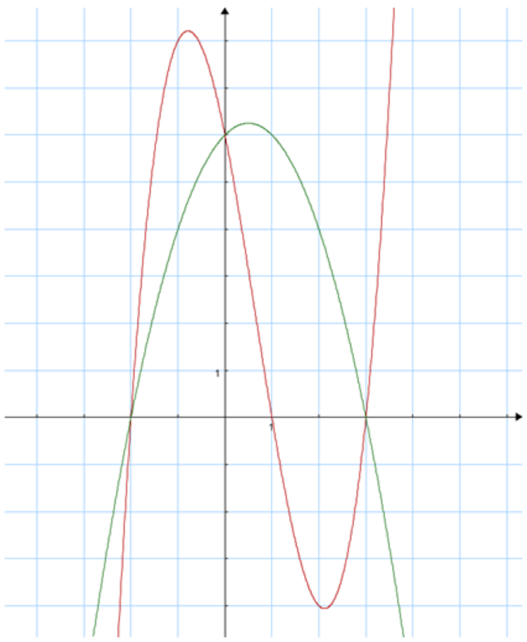
$x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

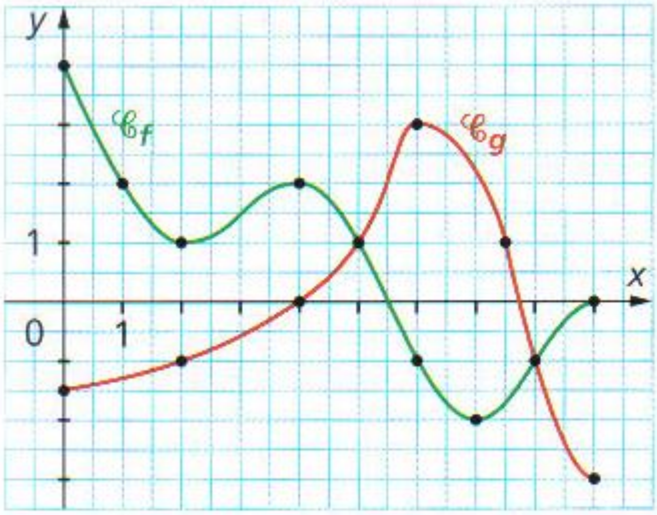
x	$-\infty$	-3		$-2/3$		0		3	$+\infty$
x	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x+2$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+3$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
Q	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$

On veut $Q \leq 0 \Leftrightarrow S =]-3;-2/3] \cup [0;3[$

Exercice 1






y
x
0
1
1
$\mathscr{C}_f$
$\mathscr{C}_g$