I. Etude des fonctions affines

Définition.
Toute fonction du type $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels donnés est appelée fonction affine.
Si $a = 0$ alors $f(x) = b$ est une fonction constante.
Si $b = 0$ alors $f(x) = ax$ est une fonction linéaire.

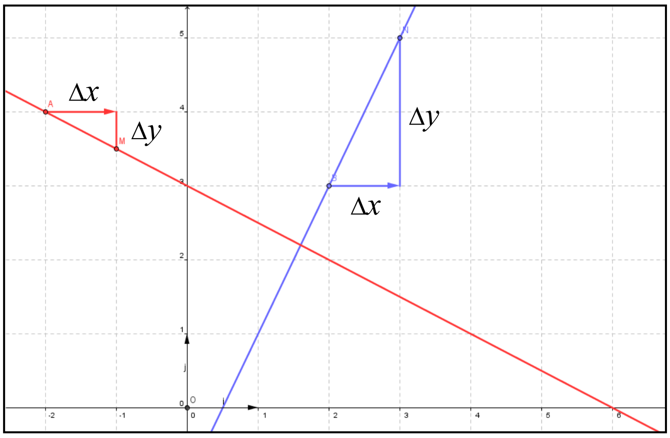
Propriété.
La fonction affine $f(x) = ax + b$ est représentée graphiquement par la droite d'équation $y = ax + b$ qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine.

Exemple.

Tracer les représentations graphiques des fonctions :
$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -0{,}5x + 3$.

a est le coefficient directeur soit le rapport entre la différence entre les ordonnées Δy et la différence entre les abscisses Δx.

b est l'ordonnée à l'origine, la droite passe par le point de coordonnées $(0,b)$.



Propriété.
Si f est une fonction linéaire alors l'image $f(x) = ax$ et son antécédent x sont proportionnels.
Si f est une fonction affine alors l'accroissement des images est proportionnel à l'accroissement des antécédents.

Démonstration.
Entre les points distincts de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ et $(x_2; f(x_2))$ l'accroissement des abscisses est $x_2 - x_1$ et celui des ordonnées est : $f(x_2) - f(x_1)$ donc le quotient de ces deux accroissements est $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{ax_2+b-ax_1-b}{x_2-x_1} = \frac{a(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = a$, il y a donc proportionnalité mais en plus nous venons de trouver un moyen de déterminer le coefficient directeur d'une droite en connaissant les coordonnées de deux de ses points

Conséquence.
Soit x_1 et x_2, deux réels distincts et f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$ alors le coefficient directeur a est $a = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ et $f(x) = a(x - x_1) + f(x_1)$

Démonstration.
Pour la première formule, consulter la démonstration précédente
Si x = x_1 alors $f(x) = f(x_1)$ et $a(x - x_1) + f(x_1) = a(x_1 - x_1) + f(x_1) = f(x_1)$
Si x = ≠ x_1 alors $\frac{f(x)-f(x_1)}{\mathrm{x}-x_1} = a \Leftrightarrow f(\mathrm{x}) - f(x_1) = \mathrm{a}(\mathrm{x} - x_1) \Leftrightarrow f(\mathrm{x}) = \mathrm{a}(\mathrm{x} - x_1) + f(x_1)$
Donc l'égalité est vraie pour tout x.

Exemple.
Soit f la fonction affine telle que $f(2) = 5$ et $f(5) = 11$. Déterminer l'expression algébrique de f.
$a = \frac{5-11}{2-5} = \frac{-6}{-3} = 2$ et $f(x) = 2(x - 2) + 5 = 2x - 4 + 5 = 2x + 1$.

Détermination algébrique de l'équation d'une droite connaissant deux points.
Dans un repère $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan, A(x_A ; y_A) et B(x_B ; y_B).
Le coefficient directeur de la droite (AB) est $a = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$
L'équation réduite de la droite (AB) est $y = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x - x_A) + y_A$.

Exemple.
A(2,3) et B(5,2) $y = \frac{2-3}{5-2}(x - 2) + 3 = \frac{-1}{3}x + \frac{2}{3} + 3 = \frac{-1}{3}x + \frac{11}{3}$

Théorème. Tableau de variations.
Soit une fonction affine $f(x) = ax + b$

Si $a > 0$, f est strictement croissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

Si $a < 0$, f est strictement décroissante

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

Théorème. Tableau de signe.
La fonction $f(x) = ax + b$ s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$ si $a \neq 0$

- Si $a > 0$,

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

- Si $a < 0$,

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

II. Les droites

Propriété.
L'équation $\alpha x + \beta y = \gamma$ (avec α et β non nuls simultanément) est l'équation d'une droite du plan, appelé **équation générale**.
L'équation $y = ax + b$ ou $x = c$ est l'équation d'une droite du plan, appelé **équation réduite**.

Remarque.
Chaque droite a une unique équation réduite, mais une infinité d'équations générales qui sont proportionnelles.

Les différentes droites :
- $x = c$ est une droite verticale. Ce n'est pas la représentation graphique d'une fonction affine.
- $y = b$ est une droite horizontale. C'est la représentation graphique d'une fonction constante.
- $y = ax + b$ est une droite oblique. C'est la représentation graphique d'une fonction affine.

Exemples.
Donner l'équation réduite de l'équation $3x - 2y = 8$.
Donner une équation générale de la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.
Tracer les droites $y = 2x - 1$, $y = -3x + 4$ et $y = 2x + 2$

Propriétés.
Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont même coefficient directeur ou elles sont verticales.

Propriétés.
La droite $\alpha x + \beta y = \gamma$ admet pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\binom{\beta}{-\alpha}$. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Exemple.
$2x + 3y = 4$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\binom{3}{-2}$.
$4x + 6y = 7$ admet pour vecteur directeur $\vec{v}\binom{6}{-4}$, donc $\vec{v} = 2\vec{u}$ *i.e.* les droites sont parallèles.

III. Systèmes d'équations

□ Résolution algébrique.
a) Résoudre par la méthode de substitution le système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

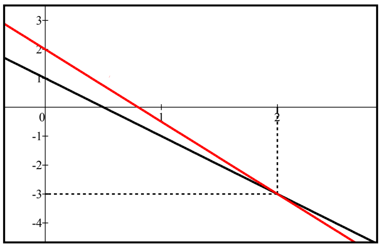
$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ 5x + 2(1 - 2x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

La solution est (2,–3).

b) Résoudre par la méthode de combinaison le système : $\begin{cases} 3x + 2y = 1 & \mathrm{L_1} \\ 4x + 5y = 6 & \mathrm{L_2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 12x + 8y = 4 & 4 \times \mathrm{L_1} \\ -12x - 15y = -18 & (-3) \times \mathrm{L_2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y = -14 & 4 \times \mathrm{L_1} - 3 \times \mathrm{L_2} \\ 3x + 2y = 1 & \mathrm{L_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

La solution est $(-1{,}2)$.

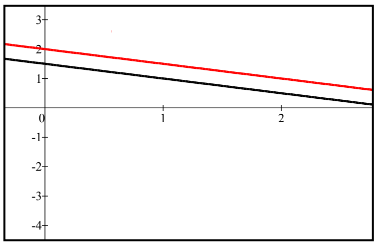


□ **Résolution graphique.**

a) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$

Résoudre graphiquement le système revient à déterminer les coordonnées (x,y) du point d'intersection des deux droites d'équation $2x + y = 1$ et $5x + 2y = 4$ soit $y = 1 - 2x$ et $y = 2 - \frac{5}{2}x$

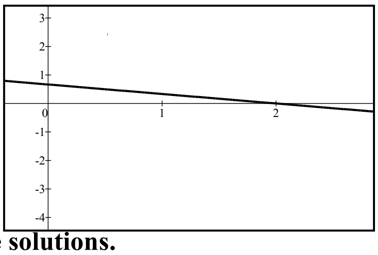
Lorsque les deux droites sont sécantes, le système possède une unique solution.



b) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$

Nous cherchons les coordonnées (x,y) du point d'intersection des deux droites $2x + 4y = 6$ et $3x + 6y = 12$ soit $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x$ et $y = 2 - \frac{1}{2}x$.

Lorsque les deux droites sont strictement parallèles, le système ne possède aucune solution.



c) Résoudre graphiquement le système : $\begin{cases} 3x + 9y = 6 \\ 4x + 12y = 8 \end{cases}$

Nous cherchons les coordonnées (x,y) du point d'intersection des deux droites $3x + 9y = 6$ et $4x + 12y = 8$ soit $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$ et $y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}x$.

Lorsque les deux droites sont confondues, le système possède une infinité de solutions.

IV. La fonction carrée $x \mapsto x^2$

Définition.

La fonction carrée est définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2$.

Propriété. Sens de variation

La fonction carrée $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0,+\infty[$ et décroissante sur $]-\infty,0]$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = x^2$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Démonstration.

$f(a) - f(b) = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

* si $0 < a < b$ alors $a - b < 0$ et $a + b > 0$ donc $(a - b)(a + b) < 0$ et donc $f(a) < f(b)$, f est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$

* si $a < b < 0$ alors $a - b < 0$ et $a + b < 0$ donc $(a - b)(a + b) > 0$ et donc $f(a) > f(b)$, f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

Définition. Parité d'une fonction.

Une fonction est **paire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

Une fonction est **impaire** lorsque pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$

Propriété.

Une fonction est paire ⇔ sa courbe représentative admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

Une fonction est impaire ⇔ sa courbe représentative admet l'origine pour centre de symétrie.

Exemples.

1\. $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

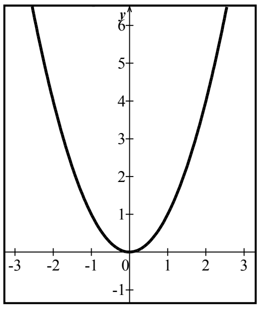
$f(-x) = (-x)^2 = x^2$, la fonction carrée est paire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. $g(x) = x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.
$g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$, la fonction cube est impaire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

3. $h(x) = 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.
$h(-x) = 2 \times (-x) + 1 = -2x + 1 \neq \pm h(x)$, la fonction h n'est ni paire, ni impaire.

Tableau de valeurs.

x	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$f(x)$	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	6,25



Courbe.
La fonction carrée est représentée par une parabole d'équation $y = x^2$.

Exemple.
Résoudre graphiquement $x^2 \leq 0{,}25$ puis $x^2 > 0{,}5$.

Propriété
Une fonction de la forme f(x) = a x² + b x + c (polynôme du second degré) admet un extremum au point de la courbe d'abscisse $\frac{-b}{2a}$, cet extrémum est un minimum si a est positif, un maximum dans le cas contraire.
La droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est l'axe de symétrie de la courbe.

V. La fonction inverse $x \mapsto 1/x$

Définition.
La fonction inverse est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Propriété. Sens de variation
La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty,0[$ et décroissante sur $]0,+\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$	↘	‖	↘

Démonstration.

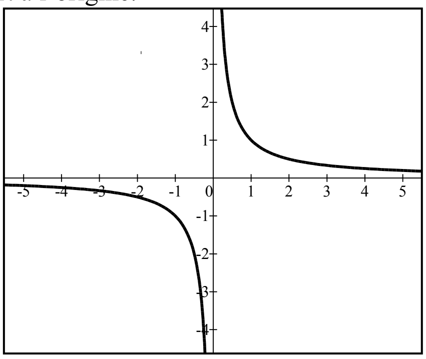
$$f(a) - f(b) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$$

* si $0 < a < b$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$ et donc $f(a) > f(b)$, f est donc décroissante sur $]0,+\infty[$
* si $a < b < 0$ alors $b - a > 0$ et $ab > 0$ donc $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} > 0$ et donc $f(a) > f(b)$, f est donc décroissante sur $]-\infty,0[$.

Parité de la fonction inverse.
$f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$, la fonction inverse est impaire, sa courbe est donc symétrique par rapport à l'origine.

Tableau de valeurs.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-0,2	-0,25	-1/3	-0,5	-1	X	1	0,5	1/3	0,25	0,2



Courbe.
La fonction inverse est représentée par une hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.
0 est une valeur interdite, il n'y a donc pas de point d'abscisse 0 sur la courbe.

Définition
Une fonction f définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec c≠0, est appelée fonction homographique.