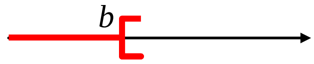
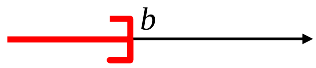
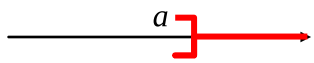
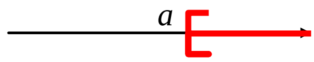
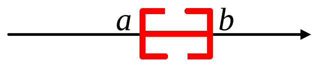
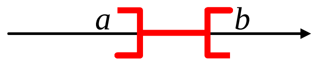
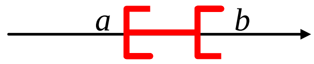
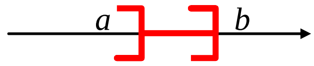
*Chapitre 1 :*

# Cours : généralité fonctions

## I. notions de base

**Correspondances inéquations, représentation graphique et intervalles**

| Le nombre réel $x$ vérifie l'inégalité | L'intervalle représenté sur la droite graduée | Le nombre $x$ appartient à l'intervalle |
|---|---|---|
| $x < b$ |  | $x \in ]-\infty, b[$ |
| $x \leq b$ |  | $x \in ]-\infty, b]$ |
| $x > a$ |  | $x \in ]a, +\infty[$ |
| $x \geq a$ |  | $x \in [a, +\infty[$ |
| $a \leq x \leq b$ |  | $x \in [a, b]$ |
| $a < x < b$ |  | $x \in ]a, b[$ |
| $a \leq x < b$ |  | $x \in [a, b[$ |
| $a < x \leq b$ |  | $x \in ]a, b]$ |

**Notations supplémentaires**

- $\cup$ se dit « union », ce symbole permet de créer des ensembles avec plusieurs intervalles, il correspond à la conjonction de coordination « **ou** ».
- $\cap$ se dit « intersection », ce symbole permet d'indiquer que l'on ne prendra que la partie commune à deux ensembles, il correspond à la conjonction de coordination « **et** ».
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, on a : $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
- I\{x ;y} se dit « I privé de x et y», ce qui veut dire que l'on considère maintenant un ensemble composé de tous les éléments de I sauf x et y.

**Exemples**

L'ensemble des nombres qui sont soit strictement plus petits que 5 ou strictement plus grand que 7, s'écrit : $]-\infty; 5[\cup]7; +\infty[$

Résoudre $\begin{cases} 5 \geq x \\ x \geq -3 \end{cases}$ revient à trouver toutes les valeurs pour lesquelles on aura $5 \geq x$ et $x \geq -3$ donc on veut des x à la fois dans $]-\infty; 5]$et dans $[-3; +\infty[$, on a donc $S = ]-\infty; 5] \cap [-3; +\infty[$=[-3 ;5].

Pour déterminer l'intersection de deux ensemble il est recommandé de tracer un axe, de colorier d'une couleur le premier ensemble et d'une autre couleur le deuxième ensemble, puis de lire quels sont les points communs aux deux ensembles.

On veut savoir quand est ce que $\frac{1}{x}$ a du sens, on sait que cette fraction n'existe que si x est différent de 0, donc l'expression aura du sens si $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ (remarque : c'est bien plus compact que l'écriture équivalente : $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

**Définition**

Soit D un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$)

- définir une fonction f de D dans $\mathbb{R}$ c'est associer à chaque réel x de D, un réel unique noté f(x).
- On dit que D est l'ensemble de définition de f, ou encore que f est définie sur l'ensemble D.

**Exemple :**
Je vais acheter des bananes au marché, elles coûtent 2,55€/kg, pour déterminer le prix de mon paquet de bananes je peux utiliser une fonction linéaire f : x →2,55x et cela est valable pour tout poids positif, on aura donc $D_f$ le domaine de définition de la fonction f qui sera $[0; +\infty[$

**Méthode pour déterminer l'ensemble de définition.**
Les opérations qui posent problèmes sont :
- la division, on ne peut pas diviser par 0. Les valeurs interdites sont celles qui annulent le dénominateur.
- la racine carrée, on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre négatif. Les valeurs interdites sont celles qui rendent négatifs l'expression sous le radical.

**Exemples.**
$g(x) = x + 3 + \frac{4}{x-2}$, $x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$ donc $D_g = R - \{2\}$ donc $D_g = ]-\infty, 2[ \cup ]2, +\infty[$
$h(x) = \sqrt{x-4}$, $x - 4 \geq 0 \iff x \geq 4$ donc $D_h = [4, +\infty[$

**Définition**
Soit f une fonction définie sur un ensemble $D_f$
- Pour tout x de $D_f$ le réel f(x) s'appelle l'image de x par f.
- *x* est appelé antécédent de *f*(*x*) par *f*. Un nombre peut avoir un, plusieurs ou aucun antécédent par une fonction. Les antécédents de *k* par la fonction *f* sont les solutions de l'équation *f*(*x*) = *k*.

**Exemples.**
■Soit une fonction $\mathcal{A}$ définie par : $\mathcal{A} : \begin{array}{ccc} [0;5] & \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25} \end{array}$
x est la variable, et $\frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25}$ est l'image de x par la fonction $\mathcal{A}$
Ici l'ensemble de définition est [0 ;5], on peut écrire $D_{\mathcal{A}} = [0;5]$
$\mathcal{A}(2) = \frac{12\times2}{5} - \frac{12\times2^2}{25} = \frac{72}{25} = 2{,}88$
On peut dire que l'image de 2 par $\mathcal{A}$ est 2,88
ou encore : 2,88 a pour antécédent 2 par $\mathcal{A}$
ou encore : 2 est un antécédent de 2,88 par $\mathcal{A}$

■Si on pose $f(x) = x^2$
$D_f = \mathbb{R}$ 7 a pour image 49 par f
Pour répondre à la question donnez les antécédents de 9, 0 et -3 je vais devoir résoudre trois équations

| | | |
|---|---|---|
| f(x)=9 | f(x)=0 | f(x)=-3 |
| ⇔ $x^2 = 9$ | ⇔ $x^2 = 0$ | ⇔ $x^2 = -3$ |
| ⇔ $x^2 - 9 = 0$ | ⇔ x = 0 | ⇔ S={∅} |
| ⇔ (x-3)(x+3) = 0 | ⇔ S={0} | car un carré ne |
| (un produit de facteurs est nul si et seulement si un de ses facteurs est nul) | | peut être négatif |
| ⇔ x = 3 ou x = -3 | | |
| ⇔ S={3; −3} | | |

Ainsi par la fonction f, 9 a deux antécédents 3 et -3, 0 a un antécédent 0 et -3 n'a pas d'antécédent.

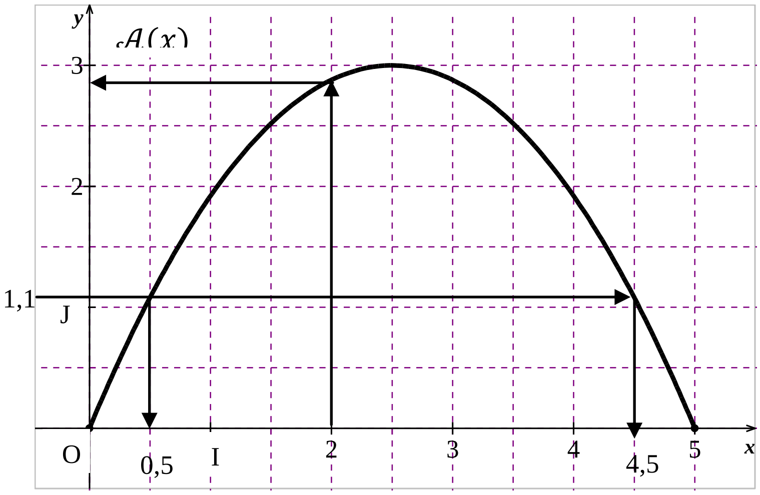
## II. Représentation graphique d'une fonction

**Vocabulaire.**
Le point O est l'**origine** du repère
(OI) est l'axe des **abscisses** (horizontal)
(OJ) est l'axe des **ordonnées** (vertical)

La longueur OI est l'unité de l'axe des abscisses
La longueur OJ est l'unité de l'axe des ordonnées
Le repère est **orthogonal** lorsque (OI)⊥(OJ)
Le repère est **orthonormal** lorsque (OI)⊥(OJ) et OI = OJ.

**Définition 2**
f est une fonction et $D_f$ son ensemble de définition
La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ (ou courbe représentative) de f dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées (x ; f(x) ) où x est un élément de $D_f$.

On peut déduire de la définition 2 que dire que M($a$ ; $b$) est un point de la courbe représentative de $f$ revient à dire que a ∈ $D_f$ et que $f(a)$ = b




**Exemple.**
Le point E(1,25 ; 2,25) appartient-il à la courbe représentative de la fonction Aire ?
$\mathcal{A}(1{,}25) = \frac{12\times1{,}25}{5} - \frac{12\times1{,}25^2}{25}$
$= 3 - 0{,}75 = 2{,}25$
L'image de 1,25 est 2,25 donc le point E est sur la courbe.

**Détermination de l'image par le graphique :**
Pour lire l'image de 2 par $\mathcal{A}$, on se place sur l'axe horizontal et on cherche sur celui-ci le point d'abscisse 2, on trace une droite verticale passant par ce point. L'image est l'ordonnée de l'unique point d'intersection entre la droite verticale tracée et la courbe.
**Ici** l'aire du rectangle MNPB est environ 2,9 cm$^2$ lorsque la longueur AM mesure 2 cm.

**Détermination de l'antécédent par le graphique :**
Les antécédents de 1,1 par $\mathcal{A}$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de la droite d'équation $y$ = 1,1.
On se place sur l'axe des ordonnées, on trace la droite d'équation $y$ = 1,1, à partir des points d'intersection de la courbe et de la droite, on se déplace verticalement jusqu'à l'axe horizontal pour pouvoir lire les abscisses des points obtenus.

Pour que l'aire du rectangle MNPB mesure 1,1 cm$^2$, AM peut valoir 0,5 cm ou 4,5 cm environ.

## <u>III. Construction de la courbe représentative d'une fonction :</u>

**Méthode**. Pour tracer la courbe, on place des points dont on a calculé les coordonnées : on choisit les abscisses et chaque ordonnée est l'image de l'abscisse correspondante par la fonction $f$.

**Exemple.** $f(x) = \frac{12x}{5} - \frac{12x^2}{25}$

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0 | 1,08 | 1,92 | 2,52 | 2,88 | 3 | 2,88 | 2,52 | 1,92 | 1,08 | 0 |

**Avec la calculatrice.**

$\boxed{f(x)}$ dans Y1= taper 12 $\boxed{x,t,\theta,n}$ /5 + 12 $\boxed{x,t,\theta,n}$ $\boxed{x^2}$ /25 puis $\boxed{2^{nde}}$ $\boxed{\text{mode}}$ pour quitter.
0 $\boxed{\text{Sto}\rightarrow}$ $\boxed{x,t,\theta,n}$ pour donner la valeur 0 à la variable $x$
$\boxed{\text{Var}}$ $\boxed{\text{Var-Y}}$ 1 :Fonction Y1 $\boxed{\text{Entrer}}$

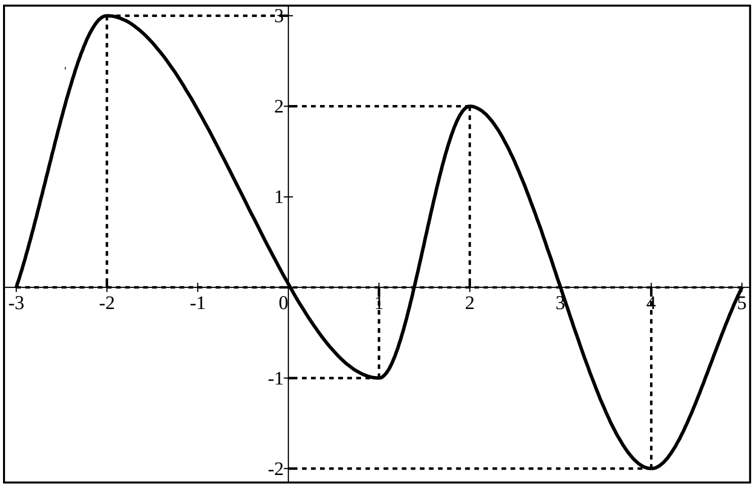
Ou bien $\boxed{2^{nde}}$ $\boxed{\text{graphe}}$ pour la table.

## IV. Variations d'une fonction

### *a*) Tableau de variations.

Le tableau de variations d'une fonction est un résumé de la courbe.
On y trouve :
- le domaine de définition de la fonction *f*.
- les changements de variations ( *f* croissante ou décroissante )
- les valeurs extrêmes de la fonction (maximum ou minimum)

**Exemple.** Soit la fonction *f* donnée par la courbe ci-dessous, définie sur l'intervalle [−3,5].



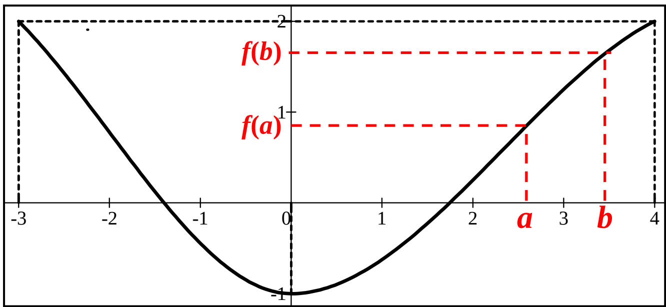

antécédents
images

| $x$ | $-3$ | | $-2$ | | $1$ | | $2$ | | $4$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $0$ | ↗ | $3$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $0$ |

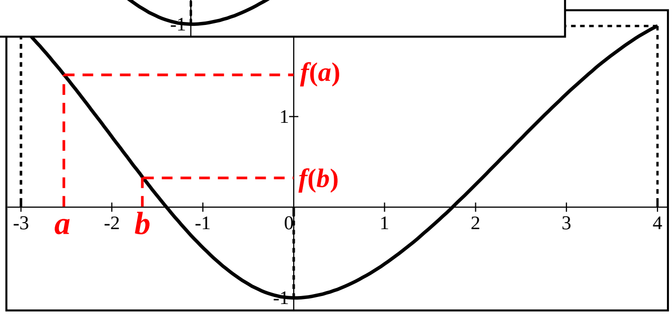
### *b*) Variations d'une fonction.

**Définition.**

Soit *f* une fonction :
On dit que *f* est **croissante** lorsque pour tous nombres $a$ et $b$ tels que $a < b$, leurs images vérifient $f(a) < f(b)$. Cela signifie que lorsque $x$ augmente, son image $f(x)$ augmente aussi.




On dit que *f* est **décroissante** lorsque pour tous nombres $a$ et $b$ tels que $a < b$, leurs images vérifient $f(a) > f(b)$. Cela signifie que lorsque $x$ augmente, son image $f(x)$ diminue.




**Exemples.**

■ Soit la fonction $f(x) = 3x + 4$. Soient $a$ et $b$ deux nombres tels que $a < b$,
Donc $3a < 3b$
Donc $3a + 4 < 3b + 4$
donc $f(a) < f(b)$.
La fonction $f(x) = 3x + 4$ est donc croissante.

■ Soit la fonction $g(x) = x^2$. En regardant la courbe on se doute qu'il faut distinguer deux cas, lorsque les nombres sont positifs et lorsque les nombres sont négatifs.

Soient a et b deux nombres tels que $0 \leq a < b$,
D'une part on a : $0 \leq aa < ba$
D'autre part on a : $0 \leq ab < bb$
Donc $a^2<ab<b^2$
Donc $a^2 < b^2$ donc $f(a) < f(b)$.
La fonction est donc croissante sur $[0,+\infty[$.

Soient $a$ et $b$ deux nombres tels que $a < b \leq 0$,
d'une part en multipliant par le négatif a
$0 \leq ba < aa$
d'autre part en multipliant par le négatif b
$0 \leq bb < ab$
Et donc $b^2<ab<a^2$
Donc $a^2 > b^2$
donc $f(a) > f(b)$.
La fonction est donc décroissante sur $]-\infty,0]$.

### *c*) Extrema d'une fonction.

**Définition.**

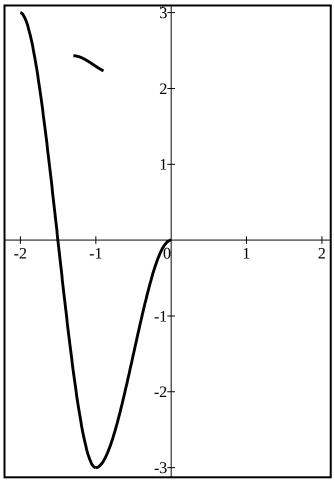
Le **minimum** $f(a)$ d'une fonction est la plus petite valeur prise par cette fonction :pour tout $x \in D_f$, $f(x) \geq f(a)$
Le **maximum** $f(a)$ d'une fonction est la plus grande valeur prise par cette fonction :pour tout $x \in D_f$, $f(x) \leq f(a)$

**Exemples.**

■. Soit la fonction $f(x) = x^2$ Montrons que 0 est le minimum de la fonction
$f(0) = 0$ et pour tout $x$, $f(x) = x^2 \geq 0$ 0 est donc le minimum de la fonction $f(x) = x^2$.

■. Démontrer que la fonction $g(x) = -x^2 +2x +2$ admet 3 pour valeur maximale.
On résout $g(x) = -x^2 + 2x + 2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 = 0$ Donc $x = 1$, soit $g(1) = -1^2 + 2 + 2 = 3$.
De plus pour tout $x$, on étudie le signe de $g(x)-3$ soit $g(x) - g(1) = -x^2 + 2x + 2 - 3 = -(x-1)^2 \leq 0$
Donc pour tout $x$, $g(x) \leq 3$.
La fonction $g$ admet donc 3 pour maximum et il est atteint en $x = 1$.

### d) Construction d'une courbe compatible avec un tableau de variation.




Soit un tableau de variation :

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $3$ | ↘ | $-3$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-1$ |

A droite on a tracé une des courbes représentative de f compatible avec le tableau de variation.