Théorème de Thalès & Equations

I. Le théorème de Thalès « version triangles emboîtés »

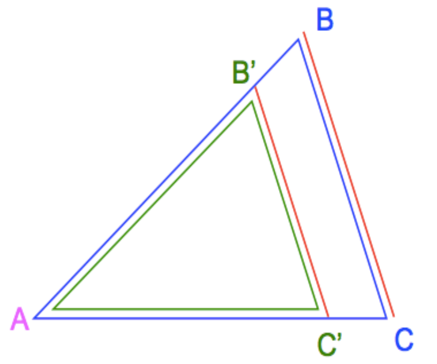
LE THÉORÈME DE THALÈS

Dans un triangle ABC,

où B'∈[AB] et C'∈[AC]

si (B'C')//(BC)

$alors\ \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$



Comment retenir le théorème de Thalès ?

ABC et AB'C' sont deux triangles en situation de Thalès ; ils ont un sommet commun A, et deux côtés parallèles (B'C') et (BC).

Un triangle est un « agrandissement » de l'autre. On dit que les deux triangles sont semblables. Ils ont donc des côtés deux à deux proportionnels.

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

← Le petit triangle AB'C'

← Le grand triangle ABC

1ers côtés   2èmes côtés   3èmes côtés

II. Le théorème de Thalès « version papillon »

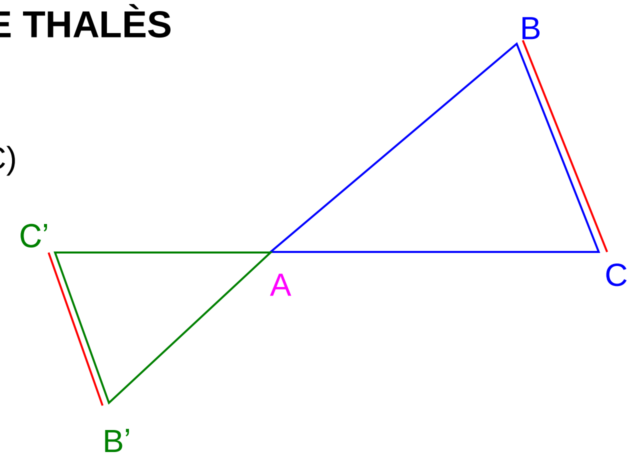
LE THÉORÈME DE THALÈS

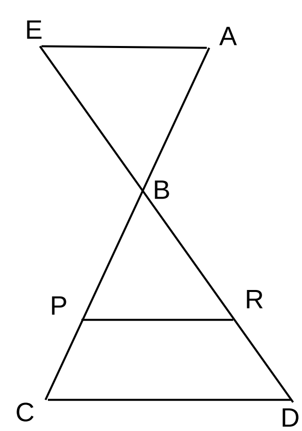
Dans un triangle ABC,

où B'∈(AB) et C'∈(AC)

si (B'C')//(BC)

$alors\ \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$





Méthode : Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

Les droites (EA), (PR) et (CD) sont parallèles. On donne : EB = 2 cm, BD = 5 cm, PR = 4 cm, CD = 6 cm.
Calculer BR et EA. Donner une valeur exacte et éventuellement une valeur approchée à 10^{-2} près centimètre.

1) Les 2 triangles BPR et BCD sont en situation de Thalès car (PR)//(CD), donc :

$$\frac{BP}{BC} = \frac{BR}{BD} = \frac{PR}{CD} \quad ; \qquad \frac{BP}{BC} = \frac{BR}{5} = \frac{4}{6} \text{ et plus particulièrement } \frac{BR}{5} = \frac{4}{6}$$

$BR = 5 \times 4 \div 6$ (produit en croix)

$= \frac{10}{3}$ cm ≈ 3,33 cm.

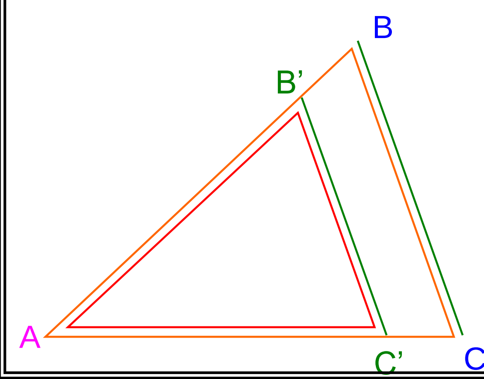
2) De même dans les triangles BEA et BDC sont en situation de Thalès car (EA) // (CD), donc : $\frac{BE}{BD} = \frac{BA}{BC} = \frac{EA}{DC}$ $donc$ $\frac{2}{5} = \frac{BA}{BC} = \frac{EA}{6}$ et plus particulièrement : $EA = 6 \times 2 \div 5 = 2{,}4\ cm.$

III. La réciproque du théorème de Thalès

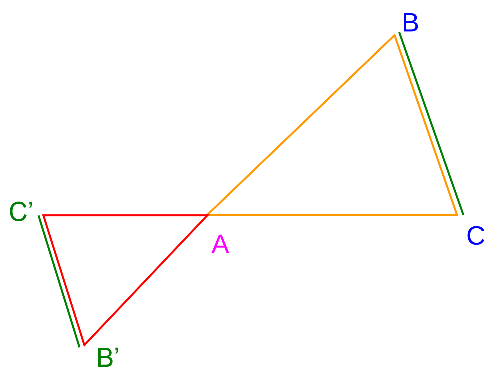
Réciproque du Théorème de Thalès

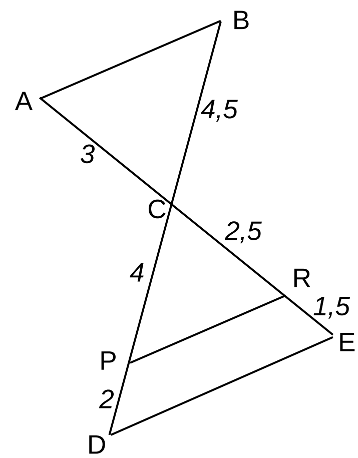
Dans un triangle ABC,
Si les points A, B et B' sont alignés dans le même ordre que les points A, C et C' et $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$ alors (BC)//(B'C')

Version « triangles emboités »



Version « papillon »





Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles ou ne le sont pas

1) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?
2) Les droites (PR) et (DE) sont-elles parallèles ?

1) D'une part : $\frac{CA}{CE} = \frac{3}{4}$ d'autre part : $\frac{CB}{CD} = \frac{4{,}5}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ donc $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$
De plus les points A, C et E sont alignés dans le même ordre que les points B,C et D.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut conclure que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

2) D'une part : $\frac{CP}{CD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$ d'autre part : $\frac{CR}{CE} = \frac{2{,}5}{4} = \frac{5}{8} = 0{,}625$

donc $\frac{CP}{CD} \neq \frac{CR}{CE}$ on ne peut pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès.

(PR) et (DE) ne sont pas parallèles.

IV. Résolution d'équations

1) Vocabulaire

INCONNUE :
c'est une lettre qui cache un nombre cherché : → x
EQUATION :
c'est une opération « à trous » dont « les trous » sont remplacés par une inconnue : $10x - 2 = 2x + 3$
RESOUDRE UNE EQUATION :
c'est chercher et trouver le nombre caché sous l'inconnue.
Généralement on regroupe les termes en x d'un côté du symbole $=$ et sans x de l'autre. Puis on divise à gauche et à droite par la quantité de x obtenu.
SOLUTION :
c'est le nombre caché sous l'inconnue : → $x = 0{,}625$

Vérification : $10 \times 0{,}625 - 2 = 2 \times 0{,}625 + 3$, donc 0,625 est solution.

Méthode : Résoudre une équation contenant des expressions entre parenthèses
Résoudre : $3(x+4) = -(x+5) + 2$

Solution : $3(x+4) = -(x+5) + 2$
⇔ $3x + 12 = -x - 5 + 2$ On applique la distributivité
⇔$3x + x = -12 - 5 + 2$
⇔$4x = -15$
⇔$x = \frac{-15}{4}$ S= $\left\{-\frac{15}{4}\right\}$

Remarque :
à partir de maintenant lorsque l'on résout une équation, on doit indiquer des liens logiques entre chaque équation. Pour peu que l'on utilise seulement les quatre opérations de manière adaptée, le lien logique à utiliser est « si et seulement si » qui se traduit par le symbole : ⇔

2) Domaine d'étude

Dans certaines équations et inéquations on peut avoir des problèmes avec des valeurs spécifiques, par exemple $\frac{1}{x} = \frac{2}{5}$. Quand $x = 0$ ce n'est pas juste que l'égalité est fausse, c'est qu'elle n'a pas de sens car le membre de gauche n'existe pas. Pour éviter cette situation, on va commencer la résolution par traquer les valeurs interdites, autrement dit les valeurs qui peuvent rendre un des membres incalculables. Ici on n'a que 0 qui peut poser problème. On indiquera alors le domaine d'étude qui contient toutes les valeurs utilisales, autrement dit toutes sauf 0 : $D_e = \mathbb{R} - \{0\}$.
Présentation alternative : $D_e =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ ou encore $D_e = \mathbb{R}^*$
Et à la fin de la résolution il faudra nous assurer que la ou les solutions trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Méthode : Résoudre une équation contenant des valeurs interdites
Après avoir factorisé le numérateur, résoudre : $\frac{x^2-16}{(x-4)} = 18$ (I)
Solution :

Comme on n'a pas le droit de diviser par zéro, on repère une valeur interdite : 4, ainsi $D_e = \mathbb{R} - \{4\}$
Résolution sur D_e:
$(I) \Leftrightarrow \frac{x^2-4^2}{(x-4)} = 18 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)} = 18 \Leftrightarrow (x+4) = 18$ la simplification par $(x-4)$ qui vient d'être faite n'a de sens que parce que l'on travaille sur $D_e = \mathbb{R} - \{4\}$ et donc on n'est pas en train de simplifier (diviser) par 0.
$(I) \Leftrightarrow x = 18 - 4$ on a donc une solution potentielle 14 qui est bien dans le domaine d'étude (autrement dit elle est acceptable) et donc $S = \{14\}$

3) Équation produit

Propriété : Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Résoudre les équations :
a) $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$ b) $4x^2 + x = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 3 = 0$

a) Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $(4x + 6)(3 - 7x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$
$\Leftrightarrow 4x = -6$ *ou* $-7x = -3$
$\Leftrightarrow x = -\frac{6}{4}$ *ou* $x = \frac{-3}{-7}$
$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ *ou* $x = \frac{3}{7}$ $S = \left\{-\frac{3}{2}\ ;\ \frac{3}{7}\right\}$

b) $4x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(4x + 1) = 0$
Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors : $x(4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $4x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $4x = -1$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\frac{1}{4}$ $S = \left\{-\frac{1}{4}\ ;\ 0\right\}$

c) $x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$
Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors : $(x - 5)(x + 5) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ ou $x + 5 = 0$
$\Leftrightarrow x = 5$ ou $x = -5$ $S = \{-5\ ;\ 5\}$
d) $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$
Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors : $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{3}\}$