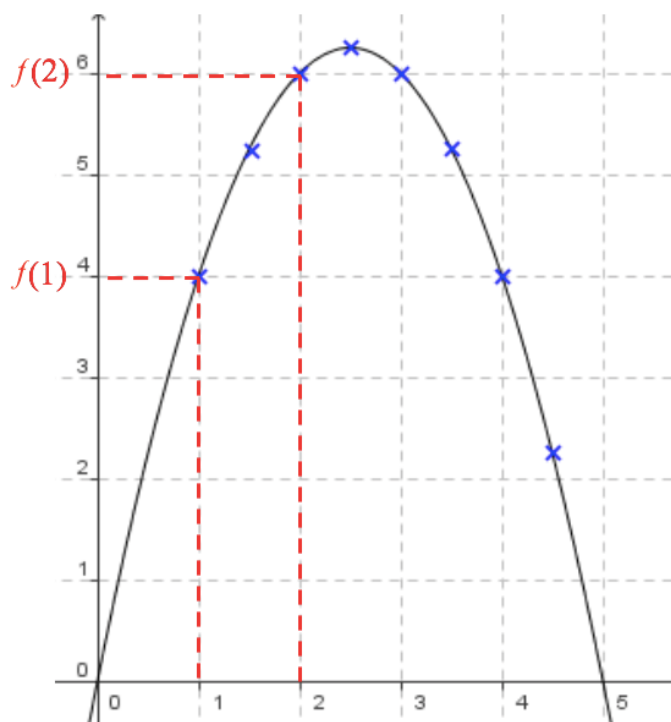


VARIATIONS D'UNE FONCTION

I. Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction

1. Exemple

On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.



Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[0 ; 2,5]$, les valeurs de f sont également croissantes.

Par exemple : $1 < 2$ et $f(1) < f(2)$.

Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle $[2,5 ; 5]$, les valeurs de f sont décroissantes.

Par exemple : $3 < 4$ et $f(3) > f(4)$.

On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2,5]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,5 ; 5]$.

Remarque :

- Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on « monte ».
- On dit qu'une fonction est décroissante lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on « descend ».

2. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.
- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.
- Dire que f est **constante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.
- Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

Remarques :

- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I .

Exercice :

Déterminer les variations des fonctions $f \rightarrow 2x + 3$ et $g \rightarrow 5x^2 - 7$ (définie sur $] - \infty; 0]$)

3. Maximum ; minimum

Exemple : On reprend la fonction f définie dans l'exemple du paragraphe 1.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 5]$, on a : $f(x) \leq 6,25$.

6,25 est le maximum de la fonction f .

Définitions :

Soit f une fonction de l'intervalle I . a et b deux nombres réels de I .

- Dire que f admet un **maximum** M en a de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \leq M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** m en b de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I , $f(x) \geq m = f(b)$.

ALGORITHMME

Pour i allant de 1 à N

Affecter à x la valeur $x + p$

Affecter à y la valeur $f(x)$

Si $y > \max$

Alors affecter à \max la valeur y

Si $y < \min$

Alors affecter à \min la valeur y

Fin Si

TP avec Python :

Approcher un extremum par la méthode du balayage

https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_Extrem.pdf

4. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

Exemple : On reprend la fonction f définie dans l'exemple du paragraphe 1.

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 2,5]$ et décroissante sur l'intervalle $[2,5 ; 5]$.

$$f(0) = 0$$

$$f(2,5) = 6,25$$

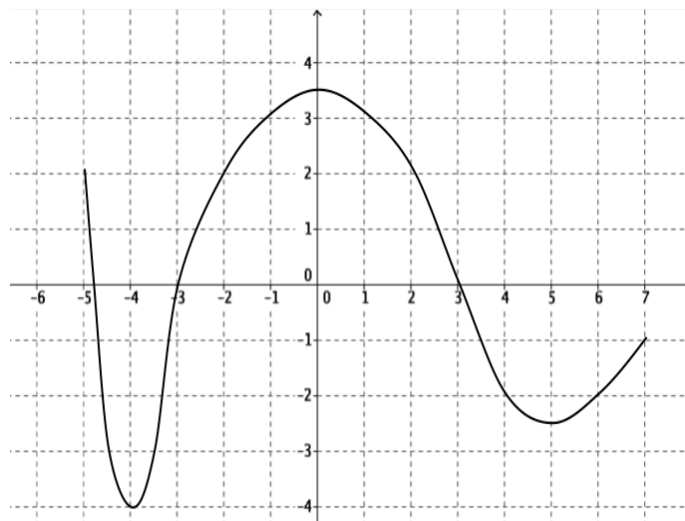
$$f(5) = 0$$

x	0	2,5	5
$f(x)$	0	6,25	0

Méthode : Déterminer graphiquement les variations d'une fonction et dresser un tableau de variations

On considère la représentation graphique la fonction f :

- 1) Donner son ensemble de définition.
- 2) Donner les variations de la fonction.
- 3) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
- 4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.



- 1) La fonction f est définie sur $[-5 ; 7]$.
- 2) La fonction f est croissante sur les intervalles $[-4 ; 0]$ et $[5 ; 7]$. Elle est décroissante sur les intervalles $[-5 ; -4]$ et $[0 ; 5]$.
- 3) 3,5 le maximum de f est atteint en $x = 0$. -4 le minimum de f est atteint en $x = -4$.
- 4)

x	-5	-4	0	5	7
$f(x)$	2	-4	3,5	-2,5	-1

II. Cas des fonctions affines et fonctions linéaires

1. Définitions

Une **fonction affine** f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels. Lorsque $b = 0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une **fonction linéaire**.

Exemples :

La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x + 6$ est une fonction affine.

La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire.

2. Variations

Propriété :

Soit f une fonction affine définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$.

Si $a > 0$, alors f est croissante sur \mathbb{R} .

Si $a < 0$, alors f est décroissante sur \mathbb{R} .

Si $a = 0$, alors f est constante sur \mathbb{R} .

Démonstration :

Soient m et p deux nombres réels tels que $m < p$.

$$f(p) - f(m) = (ap + b) - (am + b) = a(p - m)$$

On sait que $m < p$ donc $p - m > 0$.

Le signe de $f(p) - f(m)$ est le même que celui de a .

- Si $a > 0$, alors $f(p) - f(m) > 0$ soit $f(m) < f(p)$.
- Si $a = 0$, alors $f(p) - f(m) = 0$ soit $f(m) = f(p)$.
- Si $a < 0$, alors $f(p) - f(m) < 0$ soit $f(m) > f(p)$.

Donc f est croissante sur \mathbb{R} .

Donc f est constante sur \mathbb{R} .

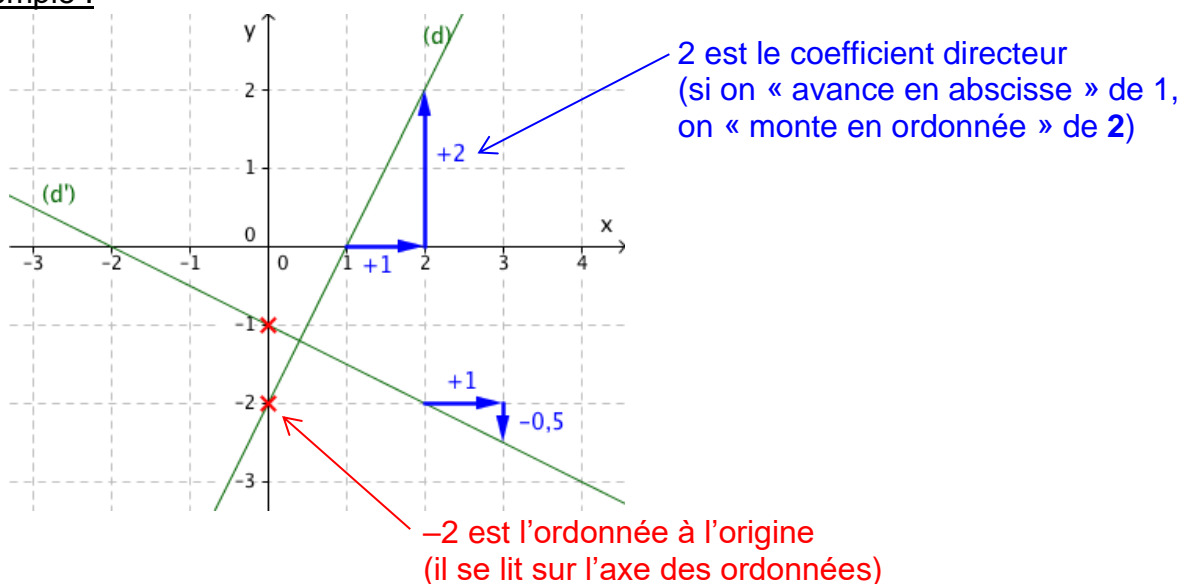
Donc f est décroissante sur \mathbb{R} .

3. Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.

Dans le cas d'une fonction linéaire, il s'agit d'une droite passant par l'origine du repère.

Dans le cas d'une fonction constante, il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple :

Pour (d) : Le coefficient directeur est 2

L'ordonnée à l'origine est -2

La fonction f représentée par la droite (d) est définie par $f(x) = 2x - 2$

Pour (d') : Le coefficient directeur est -0,5

L'ordonnée à l'origine est -1

La fonction g représentée par la droite (d') est définie par $g(x) = -0,5x - 1$

Pour la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$:

a est coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine de la droite représentative.

Propriété :

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points distincts de la droite (d) représentant la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Démonstration :

$$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$$

Comme la droite (d) n'est pas verticale, $x_A \neq x_B$, et on a : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Déterminer par calcul une expression de la fonction f telle que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

La représentation graphique correspondant à la fonction affine f passe donc par les points A(-2 ; 4) et B(3 ; 1).

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 4}{3 - (-2)} = -\frac{3}{5}$$

$$\text{Donc : } f(x) = -\frac{3}{5}x + b.$$

Comme A est un point de la droite, on a : $f(-2) = 4$, donc :

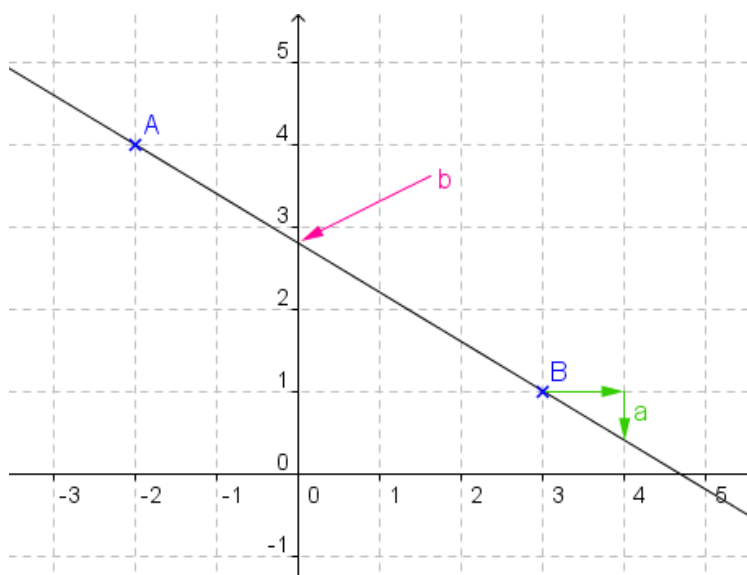
$$4 = -\frac{3}{5}(-2) + b \text{ donc } b = \frac{14}{5}.$$

$$\text{D'où : } f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}.$$

Remarque :

Le graphique permet de lire des valeurs approchées de a et b .

Cette méthode graphique n'est pas précise mais permet d'avoir un ordre de grandeur des valeurs cherchées.

III. Cas des fonctions de référence1. Variations de la fonction carréPropriété :

La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Démonstration au programme :

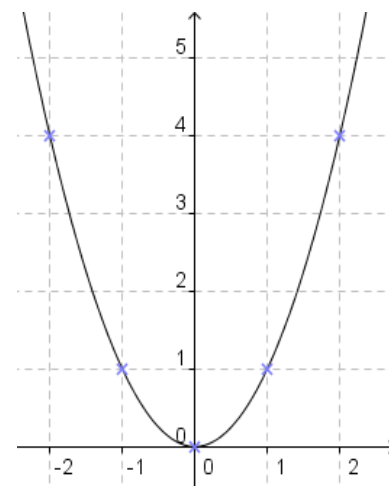
On pose : $f(x) = x^2$.

- Soit a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

La décroissance sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.



2. Résoudre une inéquation avec la fonction carré :3. Variations de la fonction inverse**Propriété :**

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Remarque :

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.

On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

Démonstration au programme :

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$.

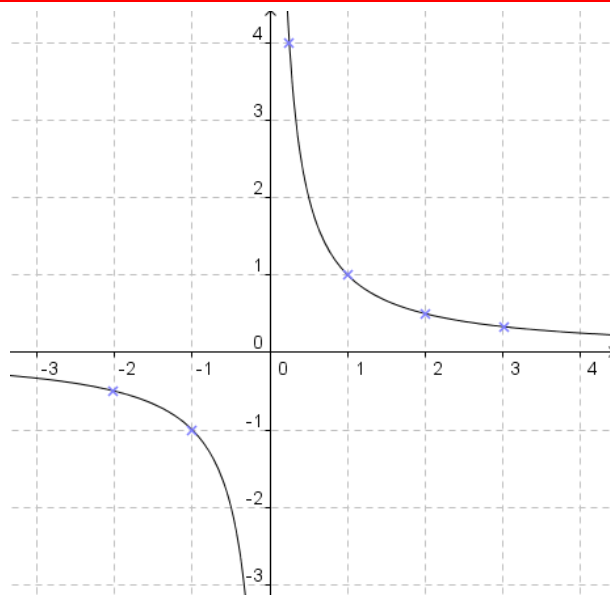
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$$

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.

f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty ; 0[$ est prouvée de manière analogue.



Propriété : Si a et b sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

$$a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l'ordre est renversé.

Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :4. Variations de la fonction racine carrée

Propriété : La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Démonstration au programme :

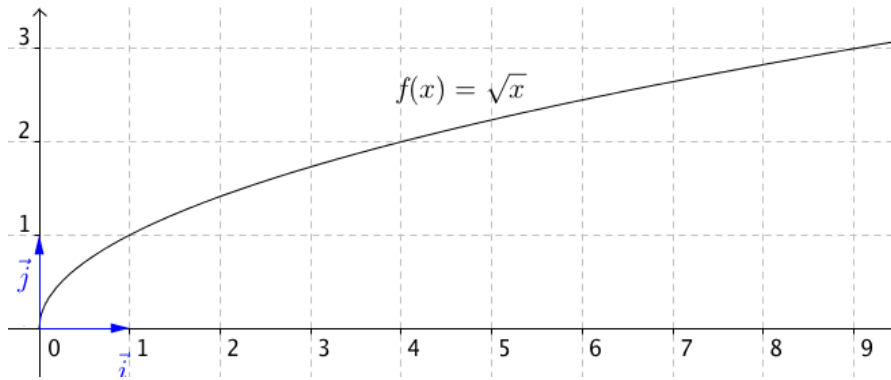
On pose : $f(x) = \sqrt{x}$.

Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b^2} - \sqrt{a^2}}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$$

Or $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$. Donc $f(b) - f(a) > 0$

Donc $f(a) < f(b)$. Ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.



Propriété : Si a et b sont deux nombres réels positifs, on a alors :

$$a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l'ordre est conservé.

5. Variations de la fonction cube

Propriété : La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .

- admis -

Propriété : $a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$

En effet, la fonction cube étant croissante, l'ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction cube :

Méthode : Ordre des nombres avec la fonction cube

Sans calculatrice, ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$\frac{1}{8} \quad 4^3 \quad -5^3 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad -\frac{1}{8}$$

$$\text{On a : } \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1^3}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad -5^3 = (-5)^3 \quad -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

La fonction cube conserve l'ordre. Donc, pour ranger dans l'ordre croissant les nombres :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad 4^3 \quad (-5)^3 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

il suffit de ranger dans l'ordre croissant ces nombres sans l'exposant 3. Soit, à ranger :

$$\frac{1}{2} \quad 4 \quad -5 \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{1}{2}$$

Or :

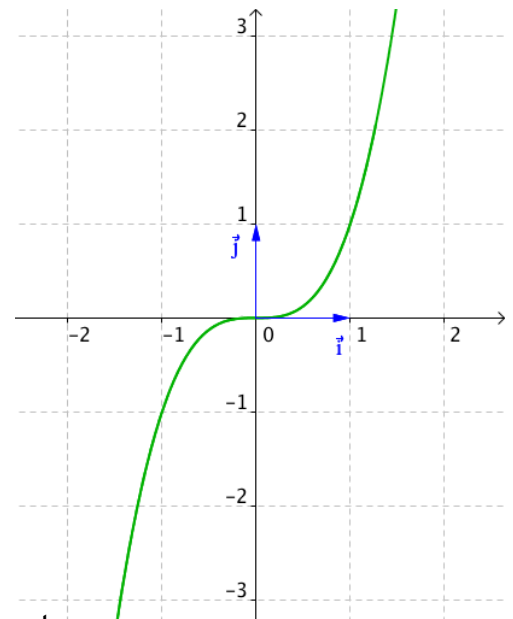
$$-5 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 4$$

Donc :

$$(-5)^3 < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 4^3$$

Soit :

$$-5^3 < -\frac{1}{8} < \frac{1}{8} < \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 4^3$$



IV. Fonction paire, impaire

1. Fonction paire

Définition : Une fonction f est **paire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

Traduction géométrique :

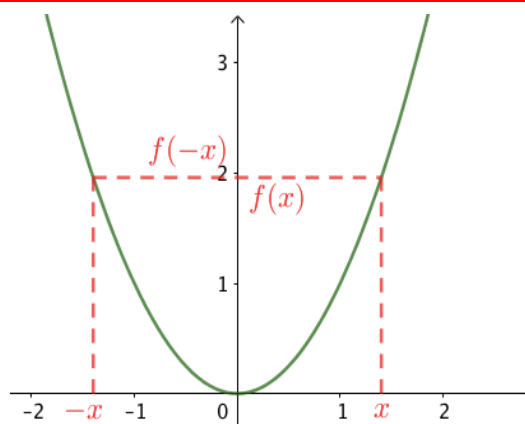
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple :

La fonction carré (représentée ci-contre) est une fonction paire.

En effet : Si $f(x) = x^2$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

Donc $f(-x) = f(x)$.



Lorsqu'on trace la fonction carré, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Fonction impaire

Définitions : Une fonction f est **impaire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

Traduction géométrique :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples :

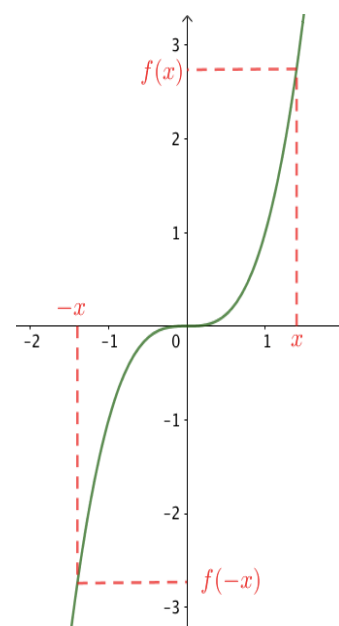
- La fonction cube (représentée ci-contre) est une fonction impaire.

En effet : Si $f(x) = x^3$, on a : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Donc $f(-x) = -f(x)$.

Lorsqu'on trace la fonction cube, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

- On peut démontrer de la même manière que la fonction inverse est impaire.



Méthode : Étudier la parité d'une fonction (non exigible)

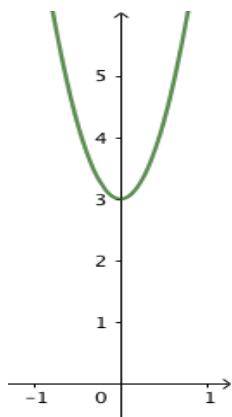
Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 + 3$ est paire.

Pour tout x réel, on a :

$$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3$$

On a donc $f(-x) = f(x)$

La fonction f est donc paire. Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



IV. Fonction paire, impaire

3. Fonction paire

Définition : Une fonction f est **paire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = f(x)$.

Traduction géométrique :

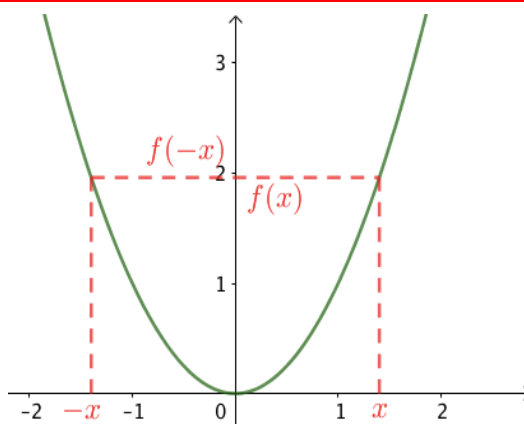
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Exemple :

La fonction carré (représentée ci-contre) est une fonction paire.

En effet : Si $f(x) = x^2$, on a : $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

Donc $f(-x) = f(x)$.



Lorsqu'on trace la fonction carré, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Fonction impaire

Définitions : Une fonction f est **impaire** lorsque pour tout réel x de son ensemble de définition D , $-x$ appartient à D et $f(-x) = -f(x)$.

Traduction géométrique :

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Exemples :

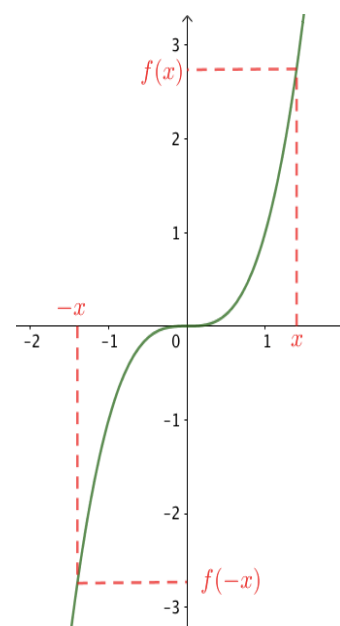
- La fonction cube (représentée ci-contre) est une fonction impaire.

En effet : Si $f(x) = x^3$, on a : $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Donc $f(-x) = -f(x)$.

Lorsqu'on trace la fonction cube, on constate que sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

- On peut démontrer de la même manière que la fonction inverse est impaire.



Méthode : Étudier la parité d'une fonction (non exigible)

Démontrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^2 + 3$ est paire.

Pour tout x réel, on a :

$$f(-x) = 5(-x)^2 + 3 = 5x^2 + 3$$

On a donc $f(-x) = f(x)$

La fonction f est donc paire. Sa représentation graphique (ci-contre) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

