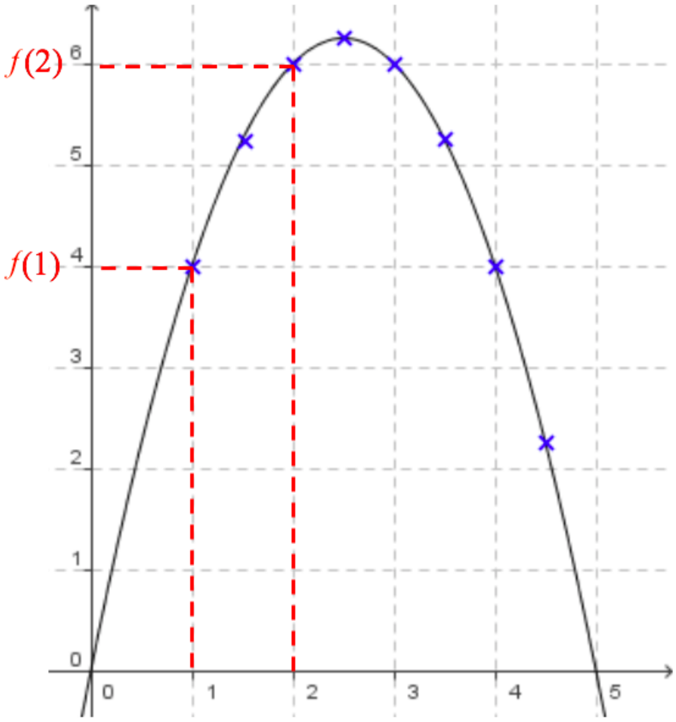
VARIATIONS D'UNE FONCTION

I. Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction

1. Exemple

On a représenté ci-dessous dans un repère la fonction f définie par $f(x) = 5x - x^2$.



Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle [0 ; 2,5], les valeurs de f sont également croissantes.

Par exemple : 1 < 2 et f (1) < f (2).

Pour des valeurs croissantes choisies pour x dans l'intervalle [2,5 ; 5], les valeurs de f sont décroissantes.

Par exemple : 3 < 4 et f (3) > f (4).

On dit que la fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].

Remarque :
- Intuitivement, on dit qu'une fonction est croissante lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on « monte ».
- On dit qu'une fonction est décroissante lorsqu'en parcourant la courbe de la gauche vers la droite, on « descend ».

2. Définitions

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Dire que f est **croissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

- Dire que f est **décroissante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I :
si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

- Dire que f est **constante** sur I signifie que pour tous réels a et b de I : $f(a) = f(b)$.

- Dire que f est **monotone** sur I signifie que f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

Remarques :
- On dit qu'une fonction croissante conserve l'ordre.
- On dit qu'une fonction décroissante renverse l'ordre.
- Une fonction constante sur I peut être considérée comme croissante et décroissante sur I.

Exercice :
Déterminer les variations des fonctions $f \rightarrow 2x + 3$ et $g \rightarrow 5x^2 - 7$ (définie sur $]-\infty; 0]$)

3. Maximum ; minimum

Exemple : On reprend la fonction f définie dans l'exemple du paragraphe 1.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 5], on a : $f(x) \leq 6{,}25$.
6,25 est le maximum de la fonction f.

Définitions :
Soit f une fonction de l'intervalle I. a et b deux nombres réels de I.

- Dire que f admet un **maximum** M en a de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \leq M = f(a)$.
- Dire que f admet un **minimum** m en b de I signifie que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f(x) \geq m = f(b)$.

ALGORITHME

```
Pour i allant de 1 à N
     Affecter à x la valeur x + p
     Affecter à y la valeur f(x)
     Si y > max
        Alors affecter à max la valeur y
     Si y < min
        Alors affecter à min la valeur y
     Fin Si
```

TP avec Python :
Approcher un extremum par la méthode du balayage
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_Extrem.pdf

4. Tableau de variations

Un tableau de variations résume les variations d'une fonction en faisant apparaître les intervalles où elle est monotone.

Exemple : On reprend la fonction f définie dans l'exemple du paragraphe 1.
La fonction f est croissante sur l'intervalle [0 ; 2,5] et décroissante sur l'intervalle [2,5 ; 5].

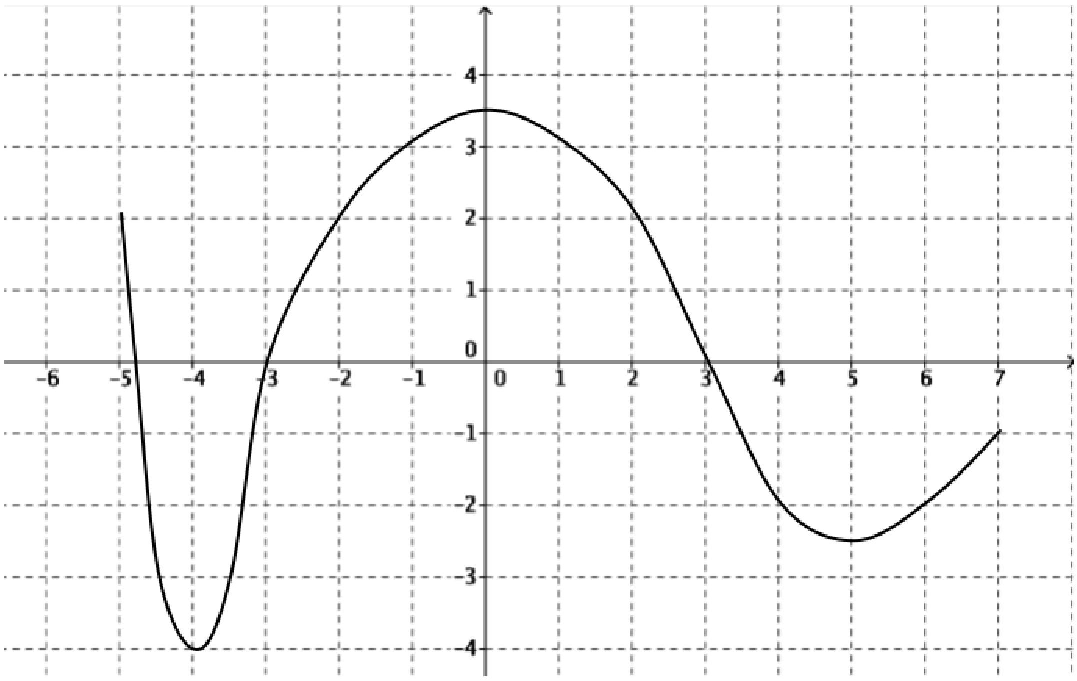
f (0) = 0
f (2,5) = 6,25
f (5) = 0

x	0		2,5		5
$f(x)$			6,25		
	0	↗		↘	0

Méthode : Déterminer graphiquement les variations d'une fonction et dresser un tableau de variations

Vidéo https://youtu.be/yGqqoBMq8Fw

On considère la représentation graphique la fonction f :



1) Donner son ensemble de définition.
2) Donner les variations de la fonction.
3) Donner les extremums de la fonction en précisant où ils sont atteints.
4) Résumer les résultats précédents dans un tableau de variations.

1) La fonction f est définie sur [–5 ; 7].

2) La fonction f est croissante sur les intervalles [–4 ; 0] et [5 ; 7]. Elle est décroissante sur les intervalles [–5 ; –4] et [0 ; 5].

3) Le maximum de f est 3,5. Il est atteint en x = 0.

Le minimum de f est – 4. Il est atteint en x = – 4 .

4)

x	-5		-4		0		5		7
$f(x)$	2				3,5				-1
		↘		↗		↘		↗	
			-4				-2,5		

II. Cas des fonctions affines et fonctions linéaires

1. Définitions

Une **fonction affine** f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.
Lorsque $b = 0$, la fonction f définie par $f(x) = ax$ est une **fonction linéaire**.

Exemples :
La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x + 6$ est une fonction affine.
La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\frac{2}{7}x$ est une fonction linéaire.

2. Variations

Propriété :
Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.

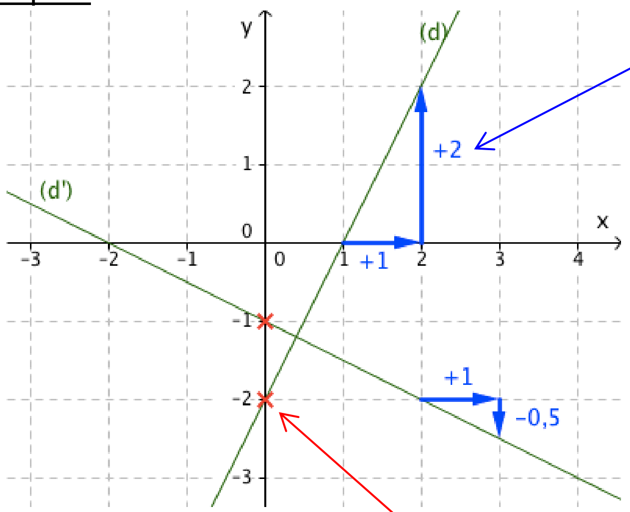
Démonstration :
Soient m et p deux nombres réels tels que $m < p$.
$f(p) - f(m) = (ap + b) - (am + b) = a(p - m)$
On sait que $m < p$ donc $p - m > 0$.
Le signe de $f(p) - f(m)$ est le même que celui de a.

- Si $a > 0$, alors $f(p) - f(m) > 0$ soit $f(m) < f(p)$. Donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors $f(p) - f(m) = 0$ soit $f(m) = f(p)$. Donc f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors $f(p) - f(m) < 0$ soit $f(m) > f(p)$. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées.
Dans le cas d'une fonction linéaire, il s'agit d'une droite passant par l'origine du repère.
Dans le cas d'une fonction constante, il s'agit d'une droite parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple :



2 est le coefficient directeur
(si on « avance en abscisse » de 1, on « monte en ordonnée » de **2**)

–2 est l'ordonnée à l'origine
(il se lit sur l'axe des ordonnées)

Pour *(d)* : Le coefficient directeur est 2
L'ordonnée à l'origine est –2

La fonction f représentée par la droite (d) est définie par $f(x) = 2x - 2$

Pour *(d')* : Le coefficient directeur est –0,5
L'ordonnée à l'origine est –1

La fonction g représentée par la droite (d') est définie par $g(x) = -0{,}5x - 1$

Pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$:
a est coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine de la droite représentative.

Propriété :
Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points distincts de la droite *(d)* représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ alors :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Démonstration :
$y_B - y_A = f(x_B) - f(x_A) = (ax_B + b) - (ax_A + b) = a(x_B - x_A)$
Comme la droite (d) n'est pas verticale, $x_A \neq x_B$, et on a : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer l'expression d'une fonction affine

Vidéo https://youtu.be/0jX7iPWCWI4

Déterminer par calcul une expression de la fonction f telle que $f(-2) = 4$ et $f(3) = 1$.

La représentation graphique correspondant à la fonction affine f passe donc par les points A(–2 ; 4) et B(3 ; 1).

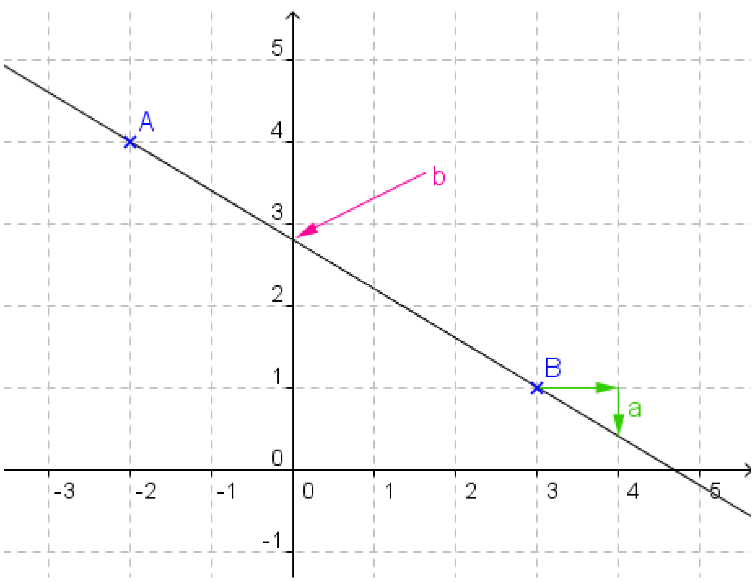
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-4}{3-(-2)} = -\frac{3}{5}$$

Donc : $f(x) = -\frac{3}{5}x + b$.

Comme A est un point de la droite, on a : $f(-2) = 4$, donc :

$$4 = -\frac{3}{5}(-2) + b \text{ donc } b = \frac{14}{5}.$$

D'où : $f(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{14}{5}$.



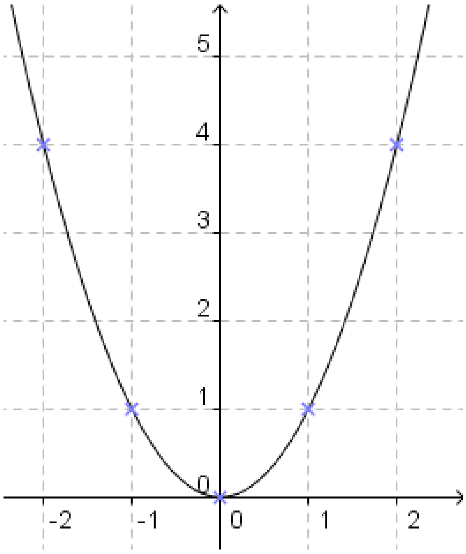
Remarque :
Le graphique permet de lire des valeurs approchées de *a* et *b*.
Cette méthode graphique n'est pas précise mais permet d'avoir un ordre de grandeur des valeurs cherchées.

III. Cas des fonctions de référence

1. Variations de la fonction carré

Propriété :
La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Démonstration au programme :



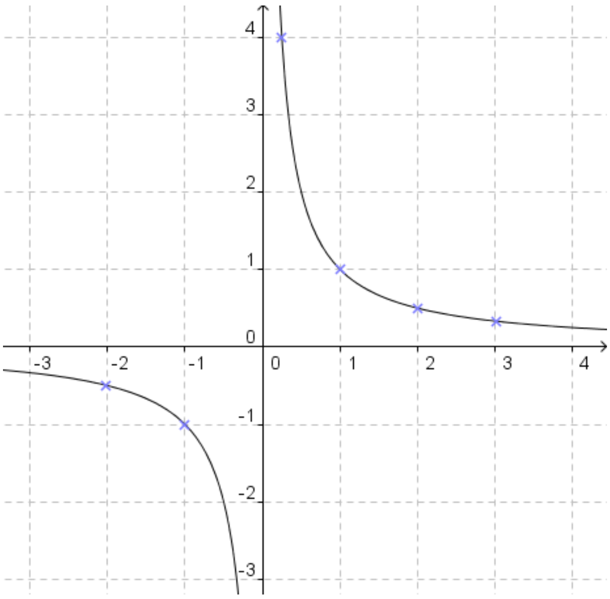
On pose : $f(x) = x^2$.
- Soit a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$.
$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$
Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$.

Résoudre une inéquation avec la fonction carré :
Vidéo https://youtu.be/Xv_mdK9kaCA

2. Variations de la fonction inverse

Vidéo https://youtu.be/Vl2rIbFF22Y

Propriété :
La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.



Remarque :

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur]–∞ ; 0[U]0 ; +∞[qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/cZYWnLA30q0

On pose : $f(x) = \frac{1}{x}$.
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$.
$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a - b < 0$. Donc $f(b) - f(a) \leq 0$.
f est ainsi décroissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty\,;0[$ est prouvée de manière analogue.

<u>Propriété :</u> Si a et b sont deux nombres réels de même signe, on a alors :

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

En effet, la fonction inverse étant décroissante, l'ordre est renversé.

<u>Résoudre une inéquation avec la fonction inverse :</u>
Vidéo https://youtu.be/-R4NyLoERVE

3. Variations de la fonction racine carrée

Vidéo https://youtu.be/qJ-Iiz8TvZ4

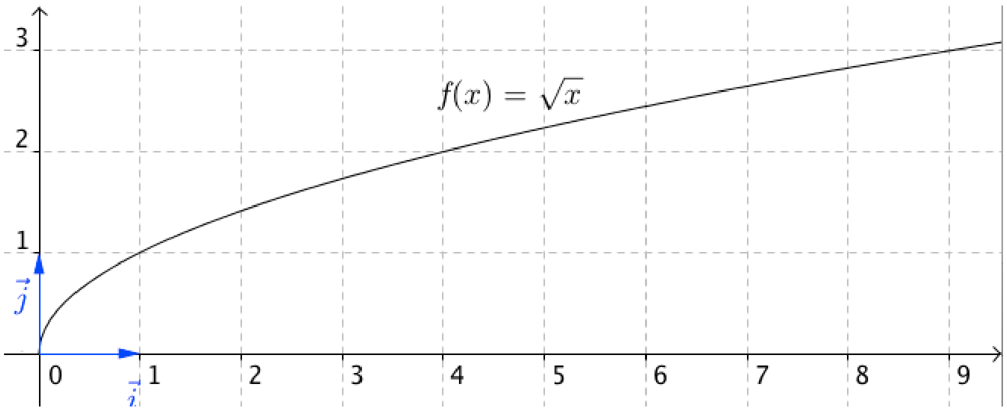
<u>Propriété :</u> La fonction racine carrée est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

<u>Démonstration au programme :</u>
Vidéo https://youtu.be/1EUTIClDac4

On pose : $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit a et b deux nombres réels positifs tels que $a < b$.

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}^2-\sqrt{a}^2}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

Or $\sqrt{b}+\sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$. Donc $f(b) - f(a) > 0$
Donc $f(a) < f(b)$.
Ce qui prouve que f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

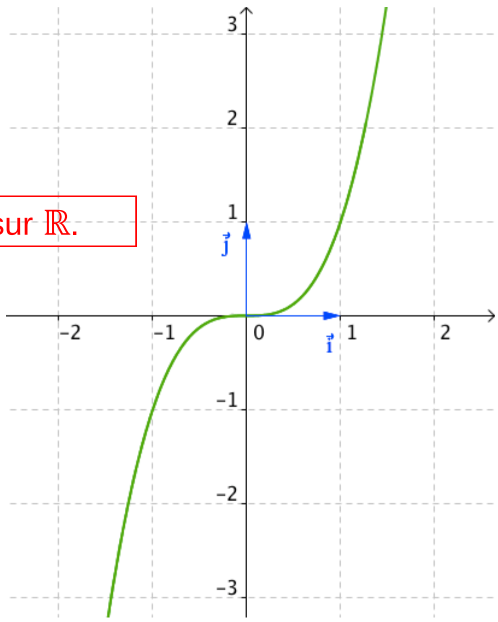


<u>Propriété :</u> Si a et b sont deux nombres réels positifs, on a alors :

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}$$

En effet, la fonction racine carrée étant croissante, l'ordre est conservé.

4. Variations de la fonction cube



Vidéo https://youtu.be/PRSDu_PgCZA

Propriété : La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- admis -

Propriété : $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^3 < b^3$

En effet, la fonction cube étant croissante, l'ordre est conservé.

Résoudre une inéquation avec la fonction cube :

Vidéo https://youtu.be/SZJ_ymhMfac

Méthode : Ordre des nombres avec la fonction cube

Vidéo https://youtu.be/8h8uAq0wH1A

Sans calculatrice, ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant :

$$\frac{1}{8} \qquad 4^3 \qquad -5^3 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad -\frac{1}{8}$$

On a :

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = \frac{1^3}{2^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad -5^3 = (-5)^3 \qquad -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

La fonction cube conserve l'ordre.

Donc, pour ranger dans l'ordre croissant les nombres :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \qquad 4^3 \qquad (-5)^3 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^3 \qquad \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

il suffit de ranger dans l'ordre croissant ces nombres sans l'exposant 3.

Soit, à ranger :

$$\frac{1}{2} \qquad 4 \qquad -5 \qquad \frac{2}{3} \qquad -\frac{1}{2}$$

Or :

$$-5 < -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 4$$

Donc :

$$(-5)^3 < \left(-\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 4^3$$

Soit :

$$-5^3 < -\frac{1}{8} < \frac{1}{8} < \left(\frac{2}{3}\right)^3 < 4^3$$