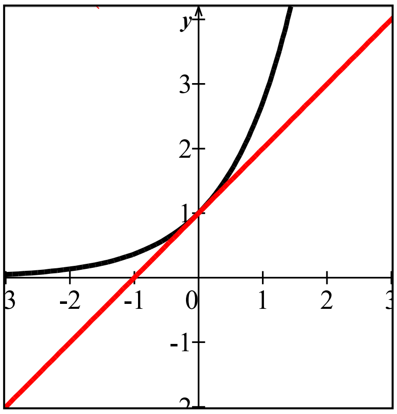
Chap 4. Développements limités

I. Développement limité au voisinage de 0 :

Définition.
Un développement limité d'une fonction f au voisinage de 0 est une approximation de f par un polynôme et un reste qui peut être négligé lorsque x est très proche de 0.

DL$_n$(0) de f : $f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n}_{partie\ \ rŽgulire} + \underbrace{x^n\varepsilon(x)}_{reste\ \ nŽgligeable}$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

Exemple.



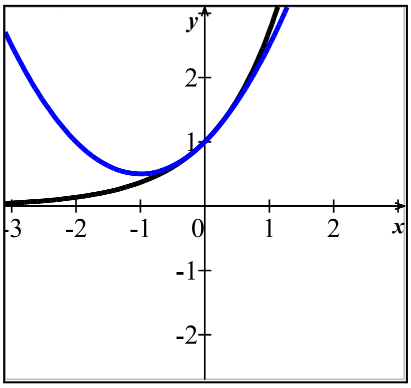
□ Approcher la fonction exponentielle par un polynôme de degré 1.
Quelle est l'équation de la tangente à $f(x) = e^x$ en $x = 0$?
$f'(x) = e^x$ et l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $y = f'(0)(x-0) + f(0) = e^0(x-0) + e^0 = x + 1$.
Cela signifie que lorsque x est proche de 0, on peut approximer la fonction exponentielle $f(x) = e^x$ par la fonction $g(x) = 1 + x$.
Soit la fonction $\varepsilon_1(x) = \frac{e^x-(1+x)}{x} = \frac{e^x-(1+x)}{x} = \frac{e^x-1-x}{x} = \frac{e^x-1}{x} - 1$, $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon_1(x) = 0$

donc $e^x = 1 + x + x\varepsilon(x)$, c'est le DL$_1$(0) de exp à l'ordre 1 en 0.

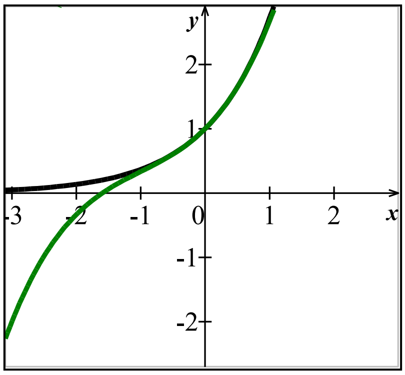
Conséquence : $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0}(1+\varepsilon(x)) = 1$

□ Approcher la fonction exponentielle par des polynômes.

Le DL$_2$(0) de la fonction exp est $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$



Le DL$_3$(0) de la fonction exp est $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$



Théorème d'unicité.
Si f possède un développement limité d'ordre n en 0 alors il est unique.

Formulaire.
Développement limité au voisinage de zéro des fonctions usuelles

$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + t^n\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \ldots + (-1)^nt^n + t^n\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + t^n\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

$\sin t = \frac{t}{1!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!} + t^{2p+1}\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!} + t^{2p}\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to0}\varepsilon(x) = 0$

Remarque.
La fonction ε n'est pas toujours la même.

Définition.
La factorielle d'un entier naturel n, notée n!, est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n : $n! = n(n-1)(n-2)\times\ldots 3\times 2\times 1$
Exemple.
1! =1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120 …

Exemple.
DL$_5$(0) de ln(1+t) : $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \frac{t^5}{5} + t^5\varepsilon(t)$
DL$_9$(0) de sin(t) : $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} + \frac{t^9}{362880} + t^9\varepsilon(t)$
Déterminer $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(1 - \frac{t^2}{6} + \frac{t^4}{120} - \frac{t^6}{5040} + \frac{t^8}{362880} + t^8\varepsilon(t)\right) = 1$ et $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t} = \lim\limits_{t\to 0}\left(1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{3} - \frac{t^3}{4} +\right.$
$t45+t4\varepsilon t=1$

Applications du développements limités.
Le DL$_1$(0) d'une fonction f définie et dérivable au voisinage de 0 est $f(t) = f(0) + f'(0)t + t\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.
Les deux premiers termes du DL donnent une équation de la tangente à la courbe c en 0 : $y = f(0) + f'(0)x$.
La position relative de la tangente et de la courbe c est donnée par le signe au voisinage de 0 de l'expression $f(t) - [f(0) + f'(0)t]$.

Exemple.
Déterminer le DL$_2$(0) de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ définie sur]–1,+∞[. En déduire une équation de la tangente T à la courbe c au point d'abscisse 0, ainsi que la position relative de c et T au voisinage de ce point.
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\alpha = -\frac{1}{2}$ et $n = 2$.
On en déduit que la tangente à la courbe en 0 a pour équation $y = 1 - \frac{1}{2}x$.
Au voisinage de 0, la position relative de T et de c est donnée par le signe $f(x) - \left[1 - \frac{1}{2}x\right] = \frac{3}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ et puisque $x^2\varepsilon(x)$ est négligeable, le signe est celui de $\frac{3}{8}x^2 \geq 0$. La courbe c est donc au-dessus de sa tangente T au voisinage de 0.

II. Opérations sur les développements limités :

Somme ou différence de fonctions.
Déterminer le DL$_3$(0) de la fonction $f(x) = e^x - \frac{1}{1+x}$ définie sur]–1,+∞[. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - \frac{1}{1+x}\right)\times\frac{1}{x}$

$$f(x) = e^x - \frac{1}{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x)\right) - \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x)\right)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_1(x) - 1 + x - x^2 + x^3 - x^3\varepsilon_2(x)$$

$$f(x) = 2x - \frac{x^2}{2} + \frac{7x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$$

donc $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x - \frac{1}{1+x}\right) \times \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(2 - \frac{x}{2} + \frac{7x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)\right) = 2$

Produit ou quotient de fonctions.

Déterminer le $DL_3(0)$ de la fonction $g(x) = \cos x \times \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x \times \sin x}{x}$

$$g(x) = \cos x \times \sin x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon_1(x)\right) \times \left(x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x)\right)$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon_2(x) - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{12} - \frac{x^5}{2}\varepsilon_2(x) + x^4\varepsilon_1(x) - \frac{x^6}{6}\varepsilon_1(x) + x^6\varepsilon_2(x)\varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + x^3\left(\underbrace{\varepsilon_2(x) + \frac{x^2}{12} - \frac{x^2}{2}\varepsilon_2(x) + x\varepsilon_1(x) - \frac{x^3}{6}\varepsilon_1(x) + x^3\varepsilon_2(x)\varepsilon_1(x)}_{\varepsilon(x)}\right)$$

$$g(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x) = x - \frac{2x^3}{3} + x^3\varepsilon_2(x)$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x \times \sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1 - \frac{2x^2}{3} + x^2\varepsilon_2(x)\right) = 1$

Composée de fonctions.

Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction $h(x) = \sin(3x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x) - 3x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x) - 3x}{x^3}$.

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} + t^5\varepsilon(t)$$

On pose ensuite $t = 3x$ donc

$$\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + \frac{(3x)^5}{120} + (3x)^5\varepsilon(3x) = 3x - \frac{3^3x^3}{3\times 2} + \frac{3^5x^5}{5\times 4\times 3\times 2} + x^5\underbrace{3^5\varepsilon(3x)}_{\varepsilon'(x)}$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{9x^3}{2} + \frac{81x^5}{40} + x^5\varepsilon'(x)$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x) - 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{9x^2}{2} + \frac{81x^4}{40} + x^4\varepsilon'(x)\right) = 0$

et $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x) - 3x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{9}{2} + \frac{81x}{40} + x\varepsilon'(x)\right) = -\frac{9}{2}$