Exercice 1.

▶1. $y' = 2y \quad \Leftrightarrow \quad y' - 2y = 0$, $\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{-2}{1} = -2$, une primitive est $\mathrm{G}(t) = -2t$.
Les solutions de l'ED sont $y(t) = ke^{2t}$ avec $k \in \mathrm{P}$.
▶2. $y(0) = 1$ donc $y(0) = 1 = k$.

$\boxed{\text{La solution vérifiant la condition initiale est donc } y(t) = e^{2t} \text{ sur P.}}$

Exercice 2.

▶1. L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 0^2 - 4 \times 4 = -16 < 0$.
L'équation possède donc deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \frac{-4i}{2} = -2i$ et $r_2 = 2i$.
La solution générale de l'ED est alors$y(t) = \big(\lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)\big)e^0 = \lambda\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ où $\lambda \in \mathrm{P}$ et $\mu \in \mathrm{P}$.
▶2. Déterminer la solution de $y'' + 4y = 0$ telle que $y(\pi) = 3$ et $y'(\pi) = 2$.
$y(\pi) = 3 = \lambda\cos(2\pi) + \mu\sin(2\pi) = \lambda$ donc $\lambda = 3$
$y(t) = 3\cos(2t) + \mu\sin(2t)$ donc $y'(t) = -6\sin(2t) + 2\mu\cos(2t)$
$y'(\pi) = 2 = -6\sin(2\pi) + 2\mu\cos(2\pi) = 2\mu$ donc $\mu = 1$.

$\boxed{\text{La solution vérifiant les conditions initiales est } y(t) = 3\cos(2t) + \sin(2t).}$

Exercice 3.

▶1. $\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{2}{1} = 2$, une primitive est $\mathrm{G}(t) = 2t$. Les solutions sont $y_0(t) = ke^{-2t}$ avec $k \in \mathrm{P}$.
▶2 *a*) $g(x) = ax + b$, $g'(x) = a$.
g est solution de (E) donc $g'(x) + 2g(x) = x$ soit $a + 2(ax + b) = x \quad \Leftrightarrow \quad 2ax + a + 2b = x$
Par identification, $\begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 0 \end{cases}$ donc $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$ donc $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est une solution particulière de (E).

b) Les solutions de (E) sont donc $y(x) = y_0(x) + g(x) = ke^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ avec $k \in \mathrm{P}$.

c) $y(0) = 1$ donc $y(0) = k - \frac{1}{4} = 1$ donc $k = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$\boxed{\text{La solution vérifiant la condition initiale est donc } y(x) = \frac{5}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \text{ sur P.}}$

Exercice 4.

▶1. L'équation différentielle homogène associée à (E) est $y' - y = 0$. $\frac{b(t)}{a(t)} = \frac{-1}{1} = -1$, une primitive est $\mathrm{G}(t) = -t$. Les solutions de l'ED sont $y_0(t) = ke^t$ avec $k \in \mathrm{P}$.
▶2 *a*) $g(x) = -x^2 - x$, $g(x) = -2x - 1$ donc $g'(x) - g(x) = -2x - 1 - (-x^2 - x) = x^2 - x - 1$.
Donc $g(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de (E).

b) Les solutions de (E) sont les fonctions $y(x) = y_0(x) + g(x) = ke^x - x^2 - x$, $k \in \mathrm{P}$.
▶3. $f(0) = ke^0 - 0^2 - 0 = 1 = k$

$\boxed{\text{La solution vérifiant la condition initiale est donc } f(x) = e^x - x^2 - x \text{ sur P.}}$

Exercice 5.

▶1. L'équation différentielle homogène associée à (E) est $y' + xy = 0$. $\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{x}{1} = x$, une primitive est $G(x) = \frac{x^2}{2}$. Les solutions de l'ED sont $y_0(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}}$ avec $k \in P$.

▶2 *a*) $h(x) = (ax + b)e^{-x}$ est solution de (E) or $h'(x) = ae^{-x} - (ax + b)e^{-x} = (-ax + a - b)e^{-x}$ donc $h'(x) + xh(x) = x^2e^{-x}$.

$$h'(x) + xh(x) = (-ax + a - b)e^{-x} + x(ax + b)e^{-x} = [ax^2 + (b - a)x + a - b]e^{-x} = x^2e^{-x}$$

On en déduit que $a = 1$ et $b = 1$ donc $h(x) = (x + 1)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

b) La solution générale de (E) est $y(x) = y_0(x) + h(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}} + (x + 1)e^{-x}$, $k \in P$.

▶3. $f(0) = ke^0 + (0 + 1)e^0 = 1 = k + 1$ donc $k = 0$

La solution vérifiant la condition initiale est donc $f(x) = (x + 1)e^{-x}$ sur P.

Exercice 6.

▶1. L'équation différentielle homogène associée à (E) est $y' + y = 0$. $\frac{b(x)}{a(x)} = \frac{1}{1} = 1$, une primitive est $G(x) = x$. Les solutions de l'ED sont $y_0(x) = ke^{-x}$ avec $k \in P$.

▶2. $h(x) = k(x)e^{-x}$ est solution de (E) or $h'(x) = k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} = \big(k'(x) -$ *kxe−x* donc *k′x−kxe−x+kxe−x=k′xe−x*=11+*ex*.

$k'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$, une primitive est $k(x) = \ln(1 + e^x)$, donc $h(x) = \ln(1 + e^x)e^{-x}$ est une solution particulière de (E).

▶3. La solution générale de (E) est $y(x) = y_0(x) + h(x) = [k + \ln(1 + e^x)]e^{-x}$, $k \in P$.

▶4. $f(0) = [k + \ln(1 + e^0)]e^0 = 1 + \ln 2 = k + \ln 2$ donc $k = 1$

La solution vérifiant la condition initiale est donc $f(x) = [1 + \ln(1 + e^x)]e^{-x}$ sur P.

Exercice 7.

▶1. L'équation différentielle homogène associée à (E) est $y'' + 2y' + y = 0$, son équation caractéristique est $r^2 + 2r + 1 = 0$. $\Delta = 2^2 - 4 = 0$, $r = \frac{-2}{2} = -1$ est une solution double. Les solutions sont $y_0(t) = (\lambda t + \mu)e^{-t}$ avec $\lambda \in P$ et $\mu \in P$.

▶2. $g(x) = 2x^2e^{-x}$, $g'(x) = 4xe^{-x} - 2x^2e^{-x} = (4x - 2x^2)e^{-x}$ et $g''(x) = (4 - 4x)e^{-x} - (4x - 2x^2)e^{-x} = (4 - 8x + 2x^2)e^{-x}$ donc $g''(x) + 2g'(x) + g(x) = (4 - 8x + 2x^2)e^{-x} + 2(4x - 2x^2)e^{-x} + 2x^2e^{-x} = 4e^{-x}$ donc g est une solution particulière de (E).

▶3. La solution générale de (E) est $y(x) = y_0(x) + h(x) = (2x^2 + \lambda x + \mu)e^{-x}$, $\lambda \in P$ et $\mu \in P$.

▶4. $f(0) = 4 = \mu$ donc $f(x) = (2x^2 + \lambda x + 4)e^{-x}$ et $f'(x) = (-2x^2 + (4 - \lambda)x + \lambda -$ 4*e−x*

$f'(0) = 1 = \lambda - 4$ donc $\lambda = 5$

La solution vérifiant la condition initiale est donc $f(x) = (2x^2 + 5x + 4)e^{-x}$ sur P.

Exercice 8.

▶1. L'équation différentielle homogène associée à (E) est $y'' - 3y' + 2y = 0$, son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$. $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 9 - 8 = 1$, il y a deux racines $r_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Les solutions sont $y_0(t) = \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $\lambda \in$P et $\mu \in$P.

▶2. $g(x) = ax^2 + bx + c$, $g'(x) = 2ax + b$ et $g''(x) = 2a$ donc $g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) = 2ax^2 + (-6a + 2b)x + 2a - 3b + 2c = 8x^2 - 24x$, donc $a = 4$, $b = 0$ et $c = -4$ donc $g(x) = 4x^2 - 4$ est une solution particulière de (E).

▶3. La solution générale de (E) est $y(x) = y_0(x) + h(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 4x^2 - 4$ avec $\lambda \in$P et $\mu \in$P.

▶4. $f(0) = 0 = \lambda + \mu - 4$, $f(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + 4x^2 - 4$ et $f'(x) = \lambda e^x + 2\mu e^{2x} + 8x$

$$f'(0) = 0 = \lambda + 2\mu$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ \lambda + 2\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 4 - \mu \\ 4 + \mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 8 \\ \mu = -4 \end{cases}$$

La solution vérifiant la condition initiale est $f(x) = 8e^x - 4e^{2x} + 4x^2 - 4$ sur P.