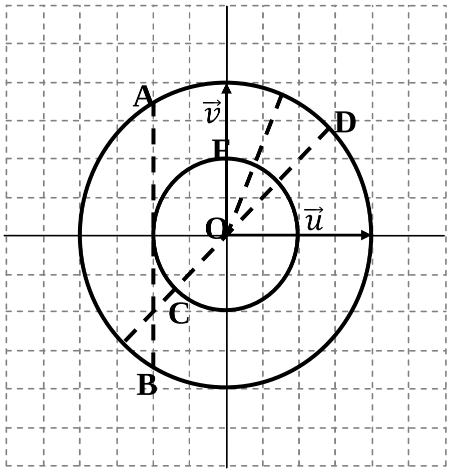
Contrôle : Complexes

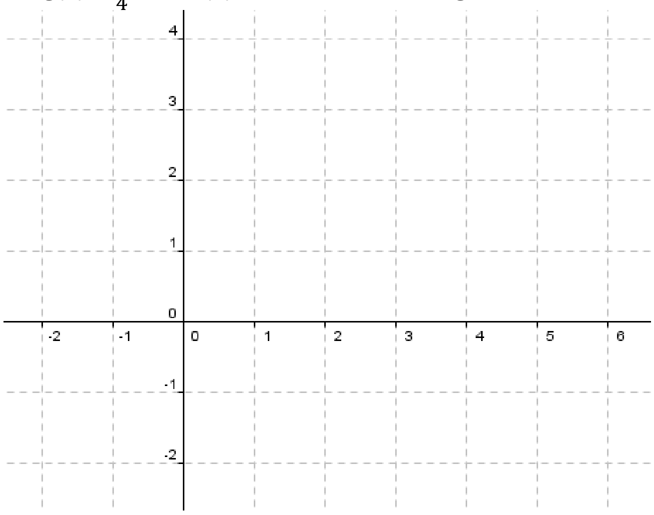
Exercice 1.
Linéariser les deux polynômes trigonométriques suivants :
$f_2(t) = \sin t \sin 2t$ $\qquad$ $f_3(t) = \cos^2 t \sin t$



Exercice 3
(O,$\vec{u}$,$\vec{v}$) est un repère orthonormal du plan complexe.
1. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_6 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$,
$z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_6 = \frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
2. *a*) Donner la forme exponentielle des affixes *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, des points A, B, C, D, F.
b) Donner la forme algébrique de *b*, *c*, *et f*.

Exercice 5
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
$a)\ln x + \ln(2x + 14) = \ln 3 + \ln(2x + 3)$ $\qquad$ $b)\ e^{2t} + 4e^t + 3 = 0$

Exercice 6
Soit f , g et h les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ suivante : $f(z) = \mathrm{Im}(z - (2 + 3i))$, $g(z) = \arg\left(\frac{z-(2+3i)}{1-0}\right)$ et $h(z) = |z - (2 + 3i)|$
Après avoir placé dans le repère ci-dessous le point A d'affixe $z_A = 2 + 3i$, tracer les lignes de niveaux suivantes f(z)= - 1, g(z) =$\frac{-\pi}{4}$ et h(z) = 1. Mettre une légende



Correction

Exercice 1.

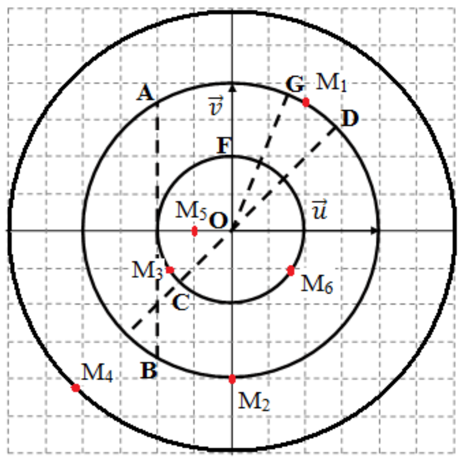
Linéariser les polynômes trigonométriques suivants

$$f_1(t) = \text{sin}t\cos 3t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2} = \frac{e^{i4t} + e^{-i2t} - e^{i2t} - e^{-i4t}}{4i} = \frac{1}{2}\sin(4t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$$

$f_2(t) = \text{sin}t\sin 2t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i} = \frac{e^{i3t}-e^{-it}-e^{it}+e^{i3t}}{-4} = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(3t)$,

$f_3(t) = \cos^2 t\,\text{sin}t$=$\frac{e^{i2t}+2+e^{-i2t}}{4} \times \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{e^{i3t}+e^{it}+2e^{it}+2e^{-it}+e^{-it}+e^{-3it}}{8} = \frac{e^{i3t}+e^{-3it}+3(e^{it}+e^{it})}{8} =$
$\frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$.

Exercice 3.



(O,$\vec{u}$,$\vec{v}$) est un repère orthonormal du plan complexe.

1.

2. *a*) Des informations de l'énoncé on peut déduire que arg(d)= $\frac{\pi}{4}$,
arg(c)= $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

Par lecture graphique on a : arg(a) =$\frac{2\pi}{3}$, arg(b) =$\frac{-2\pi}{3}$ et arg(f) =$\frac{\pi}{2}$

Les modules étant triviaux on aura donc

a=1$e^{i\frac{2\pi}{3}}$ b = 1$e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ c = $\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ d = 1 $e^{i\frac{\pi}{4}}$ f = $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donner la forme polaire des affixes *b*, *c*, *et f* des points A, B, C, D, F, G.

b = $\frac{-1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, *c*=$-\frac{\sqrt{2}}{4} - \text{i}\frac{\sqrt{2}}{4}$, *f*=*i* $\frac{1}{2}$.

Exercice 5

Résoudre dans ℝ les équations :

a)$\ln x + \ln(2x + 14) = \ln 3 + \ln(2x + 3)$ pour que l'équation ait un sens il faut que $x > 0$ et $2x + 14 > 0$ et $2x + 3 > 0$, autrement dit que x>0 et x >-7 et x>-1,5 donc il faut juste que x>0

⇔ ln(x(2x+14)) = ln(3(2x-3))

⇔ $\ln(x^2 + 14x) = \ln(6x - 9)$ ⇔ $x^2+14x = 6x - 9$

⇔ $x^2 + 8x - 9 = 0$

$\Delta = 100$ et on a deux sols : $\frac{-8-10}{2} = -9$ et $\frac{-8+10}{2} = 1$ or -9<0 donc seule 1 est une solution valide.

b) $e^{2t} + 4e^t + 3 = 0$

on pose x = e^t il ne restera plus qu'a résoudre : x^2-4x+3=0 et à faire un changement de variable sur les solutions obtenues. $\Delta = 4$ x = $\frac{-4+2}{2}$ ou $\frac{-4-2}{2}$soit deux x possibles -1 et -3

$e^{2t} + 4e^t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 = 0 \\ x = e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = -3 \\ x = e^t \end{cases}$ or l'exponentielle d'un réel n'est jamais négative donc $S = \{\emptyset\}$

Exercice 6