Les nombres complexes, correction

Exercice 1.

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (1+i)(1-2i) = 1 - 2\mathrm{i} + \mathrm{i} + 2 = 3 - \mathrm{i}$ $\quad z_2 = 3i(2-i) = 3 - 6\mathrm{i}$ $\quad z_3 = i(1+i)^2 = \mathrm{i} \times 2\mathrm{i} = -2$

$z_4 = \frac{1-i}{2i} = \frac{1}{2i} - \frac{i}{2i} = \frac{-1}{2}(1+\mathrm{i})$ $\quad z_5 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{2\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$ $\quad z_6 = \frac{i}{7+i} = \frac{i}{7+i} \times \frac{7-\mathrm{i}}{7-\mathrm{i}} = \frac{1+7\mathrm{i}}{50}$

Exercice 2.

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$z_1 = (5+4i)(-2-3i) = -10 - 15\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 12 = 2 - 23\mathrm{i}$

$z_2 = \frac{4i+2}{-3+2i} = \frac{4i+2}{-3+2i} \times \frac{-3-2i}{-3-2i} = \frac{-12\mathrm{i}-6+8-4\mathrm{i}}{13} = \frac{2-16\mathrm{i}}{13}$, $\quad z_3 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{2\mathrm{i}}{3-4\mathrm{i}} + \frac{3+6i}{3-4i} = \frac{3+8i}{3-4i}$,

$z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2 + \mathrm{i}2\sqrt{3}$.

Exercice 3.

Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :

$z_1 = 3 + 3i = 3(1+i) = 3 \times \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i = -2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$z_3 = \frac{-4}{3}i = e^{i\pi}\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}}$, $\quad z_4 = -2 = 2e^{i\pi}$.

Exercice 4.

Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :

$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1-i} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{i\frac{-\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $\quad z_2 = \sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$,

$z_3 = {z_1}^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ $\quad z_4 = -\sqrt{6} - i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{6}}$.

Exercice 5.

$z = \left(\frac{\sqrt{3}+1+(1-\sqrt{3})i}{1-i}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{3}+1+(1-\sqrt{3})i}{1-i} \times \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{12} = \left(\frac{\sqrt{3}+1+(1-\sqrt{3})i+(\sqrt{3}+1)\mathrm{i}-(1-\sqrt{3})}{2}\right)^{12} = \left(\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}\right)^{12}$

$= \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{12} = 4096e^{i4\pi} = 4096.$

Exercice 6.

1. les points d'affixes $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}$ on pour coordonnées respectives (-1 ;0), (0 ;1), et (0 ;-1).

2. $k = \frac{1}{e^{i\pi}} - e^{2i\pi} + \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}}{e^{-\frac{i\pi}{2}}} = e^{-i\pi} - e^{2i\pi} + e^{i\pi} = -1 - 2 - 1 = -4$ ainsi k est bien un réel.

Exercice 7.

On considère la fonction à valeurs complexes, définie pour tout réel θ de]0;π[par $f(\theta) = e^{i\theta} - 1$.

1. $f(\theta) = e^{i\theta} - 1 = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{-\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}2\mathrm{i}\left(\frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{-\theta}{2}}}{2\mathrm{i}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}}2e^{i\frac{\pi}{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}$

2. forme polaire

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{i\frac{5\pi}{8}}$

forme trigonométrique

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\right)$

Remarque : vu que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\mathrm{i}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

$= -2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

forme algébrique

$f(\theta) = e^{i\theta} - 1$ donc $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{i\frac{\pi}{4}} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$

►3. En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

On a par identification d'après le 2 :

$-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ et $2\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

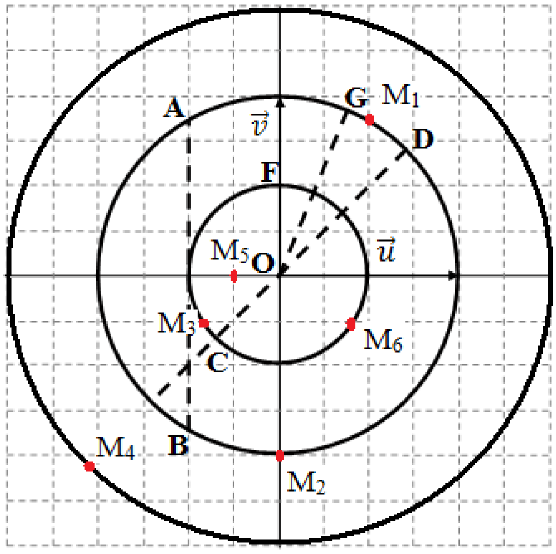
Donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et donc : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \div \left(2\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Les nombres complexes, correction

Exercice 8.

(O,$\vec{u}$,$\vec{v}$) est un repère orthonormal du plan complexe.

1. Placer les points M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , M_5 , M_6 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_4 = \frac{3}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z_5 = \frac{1}{4}e^{i\pi}$, $z_6 = \frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.



2. *a*) Des informations de l'énoncé on peut déduire que arg(d)= $\frac{\pi}{4}$, arg(c)= $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$, arg(g)= $\frac{3\pi}{8}$

Par lecture graphique on a : arg(a) =$\frac{2\pi}{3}$, arg(b) =$\frac{-2\pi}{3}$ et arg(f) =$\frac{\pi}{2}$

Les modules étant triviaux on aura donc

a=$1e^{i\frac{2\pi}{3}}$ b = $1e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ c = $\frac{1}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ d = $1\ e^{i\frac{\pi}{4}}$

f = $\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ g = $1\ e^{-i\frac{3\pi}{8}}$

Donner la forme polaire des affixes *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g* des points A, B, C, D, F, G.

b) $b = \frac{-1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, $c=-\frac{\sqrt{2}}{4} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$d=\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f=i\frac{1}{2}$.

c) $\frac{g}{f} = 2e^{i\left(-\frac{3\pi}{8}-\frac{\pi}{2}\right)} = 2e^{-i\frac{7\pi}{8}}$, $\bar{d} = 1\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $\frac{1}{d} = 1\ e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice 9.

En utilisant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2 t$ et $\sin^2 t$.

$\cos^2 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2t}+2+e^{-i2t}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$

$\sin^2 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{i2t}-2+e^{-i2t}}{-4} = \frac{1}{2} + \frac{-1}{2}\cos(2t)$

Exercice 10.

$P(t) = \sin^2 t \cos t = \frac{e^{i2t}-2+e^{-i2t}}{-4} \times \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{e^{i3t}+e^{it}-2e^{it}-2e^{-it}+e^{-it}+e^{-3it}}{-8} = \frac{e^{i3t}+e^{-3it}-(e^{it}+e^{it})}{-8} = \frac{1}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\cos(3t)$.

Exercice 11.

Linéariser les polynômes trigonométriques suivants et calculer leurs primitives sur P :

$f_1(x) = \cos^2 x \sin x = \frac{e^{i2t}+2+e^{-i2t}}{4} \times \frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{e^{i3t}+e^{it}+2e^{it}+2e^{-it}+e^{-it}+e^{-3it}}{8} = \frac{e^{i3t}+e^{-3it}+3(e^{it}+e^{it})}{8} = \frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{4}\cos(3t)$.

$f_2(x) = \sin x \sin 2x = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\frac{e^{i2t}-e^{-i2t}}{2i} = \frac{e^{i3t}-e^{-it}-e^{it}+e^{i3t}}{-4} = \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\cos(3t)$,

$f_3(x) = \sin x \cos 3x = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\frac{e^{i3t}+e^{-i3t}}{2} = \frac{e^{i4t}+e^{-i2t}-e^{i2t}-e^{-i4t}}{4i} = \frac{1}{2}\sin(4t) - \frac{1}{2}\sin(2t)$.

Exercice 12.

1. Développer $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

2. $\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3t}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{-i3t}}{8} = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$

$\sin^3 t = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{i3t}-3e^{it}+3e^{-it}-e^{-i3t}}{-8i} = \frac{-1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin(t)$.

Exercice 13.

$f_1(\varphi) = \sin\varphi \sin 4\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \times \frac{e^{i4\varphi}-e^{-i4\varphi}}{2i} = \cdots = \frac{-1}{2}\cos(5\varphi) + \frac{1}{2}\cos(3\varphi)$

$f_2(x) = \cos^2(2x)\sin(3x) = \frac{\sin(7x)+2\sin(3t)-\sin(t)}{4}$

$f_3(t) = \cos(3t)\cos(4t) = \frac{\cos(7t)+\cos(t)}{2}$.

Exercice 14.

1. $z^2 - 5z + 9 = 0$ $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 9 = -11$ donc $z_1 = \frac{5-i\sqrt{11}}{2}$ et $z_2 = \frac{5+i\sqrt{11}}{2}$

2. $z^2 - 4z + 1 = 0$ $\Delta = -14$ donc $z_1 = \frac{4-i\sqrt{14}}{2}$ et $z_2 = \frac{4+i\sqrt{14}}{2}$

Les nombres complexes, correction

3. $2z^2 - 6z + 5 = 0$ $\Delta = -4$ donc $z_1 = \frac{6-i2}{4} = \frac{3-i}{2}$ et $z_2 = \frac{6+i2}{4} = \frac{3+i}{2}$
4. $4z^2 + 4z + 1 = 0$ $\Delta = 0$ donc $z = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$

Exercice 15.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $z^2 + 6z + 34 = 0$ $\Delta = -100$ donc $z_1 = \frac{-6-i10}{2} = -3 - 5i$ et $z_2 = \frac{-6+i10}{2} = -3 + 5i$
2. $z^2 - 4z + 8 = 0$ $\Delta = -16$ donc $z_1 = \frac{4-i4}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \frac{4+i4}{2} = 2 - 2i$
3. $9z^2 - 12z + 4 = 0$ $\Delta = 108 = (6\sqrt{3})^2$ donc $z_1 = \frac{12-i6\sqrt{3}}{18} = \frac{4-i\sqrt{3}}{3}$ et $z_2 = \frac{12+i6\sqrt{3}}{18} = \frac{4+i\sqrt{3}}{3}$
4. $2z^2 - z + 1 = 0$ $\Delta = -3$ donc $z_1 = \frac{4-i\sqrt{14}}{2}$ et $z_2 = \frac{4+i\sqrt{14}}{2}$

Exercice 16.

Factoriser les polynômes suivants et déterminer leurs racines dans $\mathbb{C}$:

1. $f_1(z) = z^2 + 1$ $f_1(z) = 0$ ⇔ z² = -1 ⇔ z = i ou z = -i
2. $f_2(z) = -z^2 - z$ $f_2(z) = 0$ ⇔ -z(z+1) = 0 ⇔ z = 0 ou z = -1
3. $f_3(z) = -z^2 + 1$ $f_3(z) = 0$ ⇔z² = 1 ⇔ z = 1 ou z= -1
4. $f_4(z) = -z^2 - 1$ $f_4(z) = 0$ ⇔ z² = -1 ⇔ z = i ou z = -i

Exercice 17.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

1. $4z^2 = 3 \Leftrightarrow z^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow z = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $9z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = \frac{-4}{9} \Leftrightarrow z^2 = \left(i\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow z = i\frac{2}{3}$ ou $z = -i\frac{2}{3}$
3. $z^2 = 2z$ ⇔ z² - 2z = 0 ⇔ z(z-2) = 0 ⇔ z = 0 ou z = 2
4. $z^2 = -5 \Leftrightarrow \Leftrightarrow z = i\sqrt{5}$ ou $z = -i\sqrt{5}$

Exercice 18. En électricité.

►1. *Somme de deux nombres complexes*

On considère les nombres complexes $z_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$ et $z = Ae^{i\varphi}$ avec $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. On pose $z = z_1 + z_2$.

a) on sait que $z = z_1 + z_2$ donc $Ae^{i\varphi} = A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2}$ donc

$A\cos\varphi + iA\sin\varphi = A_1\cos\varphi_1 + iA_1\sin\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 + iA_2\sin\varphi_2$

et donc par identification : $\begin{cases} A\cos\varphi = A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 \\ A\sin\varphi = A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 \end{cases}$

b) Exprimer A en fonction de A_1, A_2 et $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$. Donner une expression de $\tan\varphi$ en fonction de A_1, A_2 et de lignes trigonométriques de φ_1 et φ_2.

$A = |z| = |z_1 + z_2| = \sqrt{(A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)^2 + (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)^2}$

$= \sqrt{{A_1}^2{\cos\varphi_1}^2 + 2A_1\cos\varphi_1 A_2\cos\varphi_2 + {A_2}^2{\cos\varphi_2}^2 + {A_1}^2{\sin\varphi_1}^2 + 2A_1\sin\varphi_1 A_2\sin\varphi_2 + {A_2}^2{\sin\varphi_2}^2}$

$= \sqrt{({A_1}^2{\cos\varphi_1}^2 + {A_1}^2{\sin\varphi_1}^2) + ({A_2}^2{\cos\varphi_2}^2 + {A_2}^2{\sin\varphi_2}^2) + 2A_1\cos\varphi_1 A_2\cos\varphi_2 + 2A_1\sin\varphi_1 A_2\sin\varphi_2}$

$= \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ CQFD

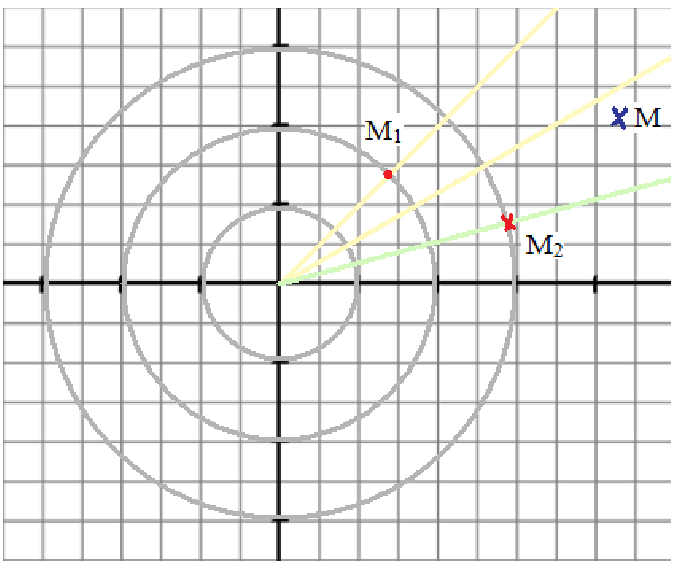
$\tan\varphi = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

►2. *Représentation géométrique d'une somme*

Dans cette question, $A_1 = 2$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$, $A_2 = 3$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{12}$.

a) Placer M_1, M_2, M les points d'affixe complexes z_1, z_2 et z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer approximativement la forme polaire de z.



$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$

$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 12\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)}$

$\approx 4{,}83$

$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \approx 0{,}51$

Donc $\varphi \approx 0{,}47\,rad$

Les nombres complexes, correction

b) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Calculer A et tanφ.

A = $\sqrt{2^2 + 3^2 + 12\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}\right)} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 12\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \sqrt{2^2 + 3^2 + 12\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

ainsi : $\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{4\sqrt{2}+3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}+3(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{7\sqrt{2}+3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{7\sqrt{2}+3\sqrt{6}}\frac{7\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{7\sqrt{2}-3\sqrt{6}}$

$= \frac{14-3\sqrt{12}+21\sqrt{12}-54}{44} = \frac{18\sqrt{12}-40}{44} = \frac{36\sqrt{3}-40}{44} = \frac{9\sqrt{3}-10}{11}$

Et $\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{9\sqrt{3}-10}{11}\right)$

▶3. *Représentation de Fresnel*

En électricité, on utilise fréquemment des fonctions sinusoïdales de la forme $t \mapsto A\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi)$ où A > 0 est la valeur efficace, ω > 0 la pulsation et φ la phase à l'origine.

Soit f_1 et f_2 deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω > 0 :

$f_1(t) = A_1\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_1)$ et $f_2(t) = A_2\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_2)$.

On considère deux nombres complexes $u_1 = A_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)}$ et $u_2 = A_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)}$.

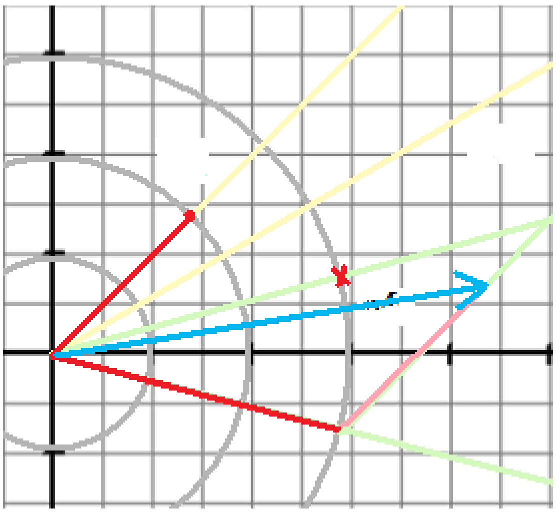
a)

$u_1 + u_2 = A_1 e^{i(\omega t+\varphi_1)} + A_2 e^{i(\omega t+\varphi_2)} = e^{i\omega t}(A_1 e^{i\varphi_1} + A_2 e^{i\varphi_2})$ donc d'après la partie précédente on peut écrire $u_1 + u_2$ sous la forme suivante : $e^{i\omega t}(Ae^{i\varphi}) = Ae^{i(\omega t+\varphi)}$ avec : A=$\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ et Tan φ = $\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

Ainsi la somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale de pulsation ω.

b) Un repère orthonormal du plan (O,$\vec{u}$,$\vec{v}$) étant choisi, la représentation de Fresnel de la fonction sinusoïdale $t \mapsto A\sqrt{2}\sin(\omega t +$ φ est le vecteur OM d'affixe z=Aeiφ. Soit f1t=22sinωt+π4 et f2t=32sinωt−π12.

Représenter les vecteurs de Fresnel de ces deux fonctions et leur vecteur somme. Calculer la phase à l'origine et la valeur efficace de la somme de ces deux fonctions.



j'ai mis en rouge les représentation de fresnel des deux fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ et en bleu celle de $f_1(t)$ +$f_2(t)$

pour trouver la valeur efficace et la phase à l'origine j'utilise les formules découvertes lors de la partie précédente.

A=$\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ et Tan φ = $\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$

A=$\sqrt{13 + 12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ et Tan φ = $\frac{2\frac{\sqrt{2}}{2} - 3\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{2\frac{\sqrt{2}}{2} + 3\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

A=$\sqrt{19}$ et Tan φ = $\frac{4\sqrt{2}-3(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4\sqrt{2}+3(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = \frac{7\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{7\sqrt{2}+3\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{7\sqrt{2}+3\sqrt{6}}\frac{7\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{7\sqrt{2}-3\sqrt{6}} =$
$\frac{98+42\sqrt{12}+54}{44} = \frac{152+84\sqrt{3}}{44}$

Bonus

Reprendre cette question pour $f_1(t) = 3\sqrt{2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{8}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$