Chap 1. Les nombres complexes

I. L'ensemble des nombres complexes :

Définition.
On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est l'ensemble des expressions de la forme $z = x + i\,y$ où $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le nombre réel x est appelé la **partie réelle** de z. Le nombre réel y est appelé la **partie imaginaire** de z.
Le nombre complexe $\bar{z} = x - iy$ est appelé le **complexe conjugué** de z.
Le nombre réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ est appelé le **module** du nombre complexe z.
La notation $z = x + iy$ s'appelle la **forme cartésienne** ou encore **forme algébrique** du nombre complexe z.

Remarque : En électricité, la lettre i désigne l'intensité du courant, on utilise alors la lettre j pour les nombres complexes. On écrit $z = a + jb$ avec $j^2 = -1$.

Exemple :
▶1. Mettre sous forme algébrique z_A+z_B, z_Az_B et $(\overline{z_B})^2$ où $z_A = 4-3i$ et $z_B = -2+7i$. Calculer $|z_A|$ et $|z_B|$.
▶2. Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $\frac{2-3i}{1+i}$.

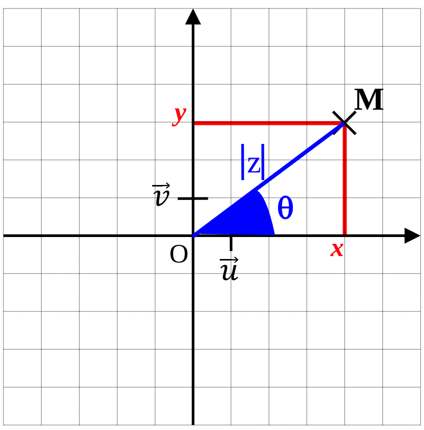
$$\frac{2-3i}{1+i} = \frac{(2-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2-3i-2i+3i^2}{1-i^2} = \frac{-1-5i}{2}$$

Propriété.
Pour tout nombre complexe z, $z\bar{z} = |z|^2$
Démonstration : Soit $z = x + iy$ un nombre complexe quelconque, $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$❏

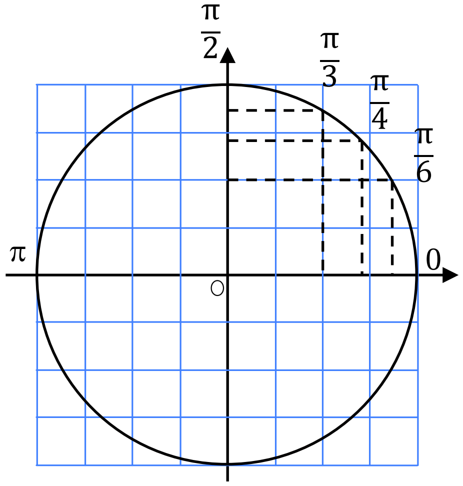
Définition et propriété.
Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, tout nombre complexe $z = x + iy$ peut être associé soit au point M de coordonnées (x,y) soit au vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées $\binom{x}{y}$.
On dit alors que $z = x + iy$ est l'**affixe** du point $M(x,y)$ et du vecteur $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Le module ρ de z représente la longueur entre O et M : $\rho = OM = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$.
Un **argument** de z, que l'on note arg z, est une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
Soit θ un argument de z, les autres arguments de z sont de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

La notation $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho, \theta]$ s'appelle la **forme trigonométrique** du nombre complexe z.



Rappel :



Angle θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1
sinθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

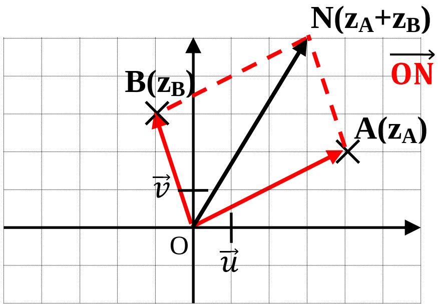
Exemple : Déterminer la forme trigonométrique du nombre $z = -2 + 2i\sqrt{3}$.

Calcul du module : $|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{4+12} = 4$

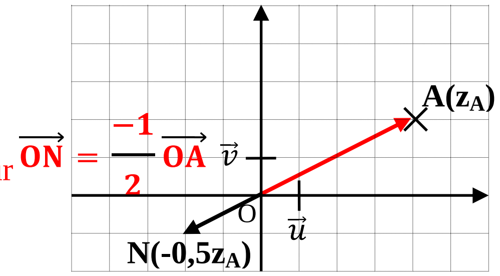
Donc $z = 4\left(\frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

Calcul de l'argument : on cherche l'angle θ tel que$\cos\theta = \frac{-1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ soit $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

Donc $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.



Théorème Addition. Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ a pour affixe $z_A + z_B$.



Théorème de multiplication par un scalaire. Si A a pour affixe z_A et α est un nombre réel alors le vecteur $\alpha\overrightarrow{OA}$ a pour affixe αz_A.

$\frac{\pi}{2}$

Conséquence : Si A et B ont pour affixes z_A et z_B alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.
Et $|z_B - z_A| = AB$ et si A≠B $\arg(z_B - z_A) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$

II. Propriétés du module et des arguments d'un complexe

Propriété. Soit $z_1 = [\rho_1, \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2, \theta_2]$ deux nombres complexes non nuls
$|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$ et $\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
En résumé $[\rho_1, \theta_1] \times [\rho_2, \theta_2] = [\rho_1\rho_2, \theta_1 + \theta_2]$

Propriété. Soit $z = [\rho, \theta]$ un nombre complexe non nul
$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
En résumé $\frac{1}{[\rho, \theta]} = \left[\frac{1}{\rho}, -\theta\right]$

Propriété. Soit $z_1 = [\rho_1, \theta_1]$ et $z_2 = [\rho_2, \theta_2]$ deux nombres complexes non nuls
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
En résumé $\frac{[\rho_1,\theta_1]}{[\rho_2,\theta_2]} = \left[\frac{\rho_1}{\rho_2}, \theta_1 - \theta_2\right]$

Exemple.
Soit $z_1 = [2, \frac{\pi}{4}]$, et $z_2 = [1, \frac{\pi}{3}]$, déterminer la forme trigonométrique de $z_1 \times z_2$, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{\overline{z_2}}$ et $\frac{z_1}{z_2}$.

Propriété. Soit $z = [\rho, \theta]$ un nombre complexe non nul et $n \in \mathbb{Z}$
$|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
En résumé $[\rho, \theta]^n = [\rho^n, n\theta]$

III. Equation du second degré :

Théorème.
Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$, on considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
Pour résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta > 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet une solution réelle double $z = \frac{-b}{2a}$
- si $\Delta < 0$ alors l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2 - 6x + 10 = 0$
$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 10 = -4 < 0$, l'équation $x^2 - 6x + 10 = 0$ possède donc deux racines complexes conjuguées : $x_1 = \frac{6+i\sqrt{4}}{2} = 3 + i$ et $x_2 = \frac{6-i\sqrt{4}}{2} = 3 - i$

IV. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

Définition.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on note e^{ix} le nombre complexe $\cos x + i\sin x = [1, x]$.

Remarque : Le nombre complexe z de module ρ et d'argument θ peut se noter $z = [\rho, \theta] = \rho e^{i\theta}$.
Cette notation $z = \rho e^{i\theta}$ s'appelle la **forme exponentielle ou polaire** du nombre complexe z.

Propriété.
Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,
$e^{ix}.e^{iy} = e^{i(x+y)}$ $\qquad \frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$

Propriété. Formule de Moivre Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

Propriété. Formule d'Euler Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$

Exemple. Pour linéariser *i.e.* pour transformer ce produit en somme de termes du type cosnx ou sinnx avec $n \in \mathbb{N}$.

$$\cos x\sin^2 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2e^{ix}e^{-ix}}{-4}\right)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}+e^{-2ix}-2}{-4}\right)$$

$$\cos x\sin^2 x=\frac{1}{-8}\left(e^{3ix}+e^{-ix}-2e^{ix}+e^{ix}+e^{-3ix}-2e^{-ix}\right)=\frac{1}{-8}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}-\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$

$$\cos x\sin^2 x=\frac{1}{-8}(2\cos 3x-2\cos x)=\frac{\cos x-\cos 3x}{4}$$

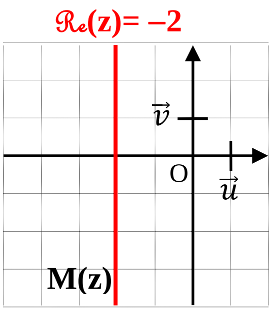
V. Forme exponentielle d'un nombre complexe :

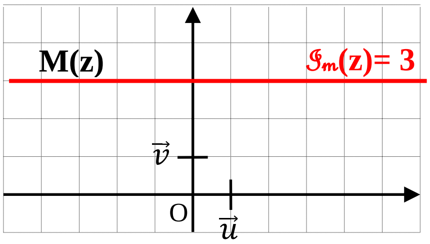
Définition. Ligne de niveau : Si f est une fonction de X dans P et k un réel, on appelle **ligne de niveau k de f**, l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $f(z)=k$.

Exemples :

▶ 1. **Lorsque la fonction f est définie par $f(z)=\mathcal{R}_e(z)$ (partie réelle de z).**

La ligne de niveau −2 de f est l'ensemble des points M(x,y) d'affixe z=x+iy tels que $\mathcal{R}_e(z) = x = -2$.
C'est donc la droite d'équation $x= -2$.



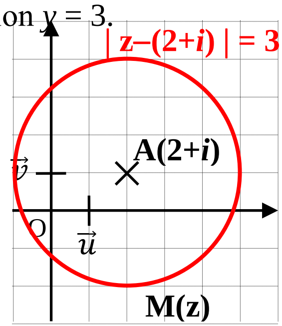


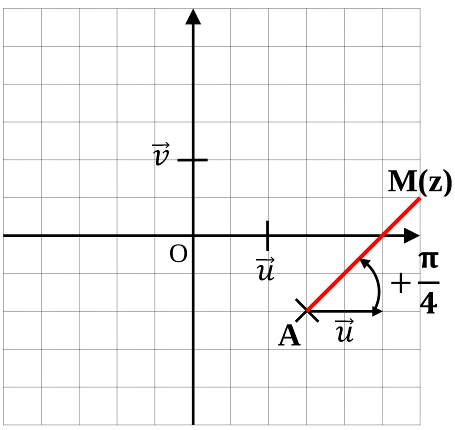
▶ 2. **Lorsque la fonction f est définie par $f(z)=\mathcal{J}_m(z)$ (partie imaginaire de z).**

La ligne de niveau 3 de f est l'ensemble des points M(x,y) d'affixe z=x+iy tels que $\mathcal{J}_m(z) = y = 3$.
C'est donc la droite d'équation $y = 3$.

▶ 3. **Lorsque la fonction f est définie par $f(z) = | z - (2+i) |$**

La ligne de niveau 3 de f est l'ensemble des points M(x,y) d'affixe z=x+iy tels que $| z - (2+i) | = 3$ c'est à dire AM=3 où A(2+i).
C'est donc le cercle de centre A(2+i) et de rayon 3.





▶ 4. **Lorsque la fonction f est définie par $f(z)=\text{Arg}(z-(3-2i))$.**

La ligne de niveau $\pi/4$ de f est l'ensemble des points M(x,y) d'affixe z = x+iy tels que $\text{Arg}(z-(3-2i))=\pi/4=\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)$ où A(3–2i).
C'est donc la demi-droite d'origine A (non comprise) et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que l'angle $(\vec{u},\vec{w})=\frac{\pi}{4}$.