Les nombres complexes

Exercice 1.
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$z_1 = (1+i)(1-2i)$ $z_2 = 3i(2-i)$ $z_3 = i(1+i)^2$
$z_4 = \frac{1-i}{2i}$ $z_5 = \frac{1+i}{1-i}$ $z_6 = \frac{i}{7+i}$

Exercice 2.
Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :
$z_1 = (5+4i)(-2-3i)$, $z_2 = \frac{4i+2}{-3+2i}$, $z_3 = \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i}$, $z_4 = 4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Exercice 3.
Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :
$z_1 = 3+3i$, $z_2 = -1-\sqrt{3}i$, $z_3 = \frac{-4}{3}i$, $z_4 = -2$.

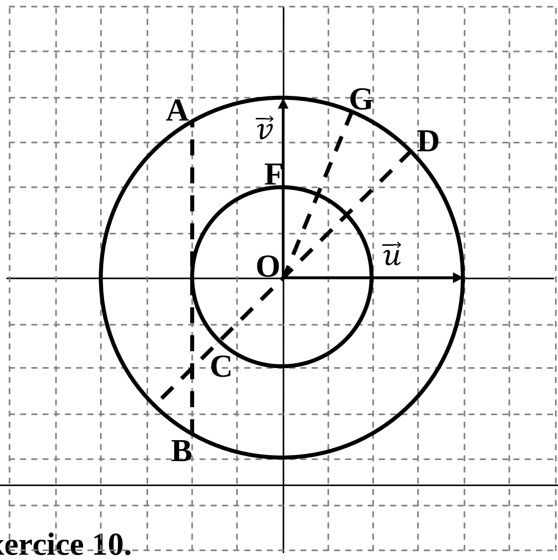
Exercice 4.
Mettre sous forme polaire les nombres complexes suivants :
$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$, $z_2 = \sqrt{3}+3i$, $z_3 = {z_1}^2$, $z_4 = -\sqrt{6} - i\sqrt{2}$.

Exercice 5.
Calculer $z = \left(\frac{\sqrt{3}+1+(1-\sqrt{3})i}{1-i}\right)^{12}$.

Exercice 6.
▶1. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, placer les points d'affixes $e^{i\pi}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}$.
▶2. Soit $k = \frac{1}{e^{i\pi}} - e^{2i\pi} + \frac{e^{i\pi/2}}{e^{-i\pi/2}}$. Démontrer que $k\in$P.

Exercice 7.
On considère la fonction à valeurs complexes, définie pour tout réel θ de]0;π[par $f(\theta) = e^{i\theta} - 1$.
▶1. En mettant $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur, et en utilisant l'une des formules d'Euler, démontrer que $f(\theta) = 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp\left(i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.
▶2. Donner $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, sous forme polaire, sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
▶3. En déduire $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

Exercice 8.
$(O,\vec{u},\vec{v})$ est un repère orthonormal du plan complexe.
▶1. Placer les points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 d'affixes respectives $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, $z_3 = \frac{1}{2}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $z_4 = \frac{3}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z_5 = \frac{1}{4}e^{i\pi}$, $z_6 = \frac{1}{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.
▶2 *a*) Sur le dessin ci-contre, la droite (CD) est la bissectrice de l'angle formé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, (OG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DOF}$.
Donner la forme polaire des affixes *a*, *b*, *c*, *d*, *f*, *g* des points A, B, C, D, F, G.
b) Donner la forme algébrique de *b*, *c*, *d*, *f*.
c) Ecrire sous forme polaire $\frac{g}{f}$, $\bar{d}$ et $\frac{1}{d}$.



Exercice 9.
En utilisant les formules d'Euler, linéariser $\cos^2 t$ et $\sin^2 t$.

Exercice 10.
Linéariser le polynôme trigonométrique $P(t) = \sin^2 t \cos t$.

Exercice 11.
Linéariser les polynômes trigonométriques suivants et calculer leurs primitives sur P :
$f_1(x) = \cos^2 x \sin x$, $f_2(x) = \sin x \sin 2x$, $f_3(x) = \sin x \cos 3x$.

Exercice 12.
▶1. Développer $(a+b)^3$.
▶2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$.

Exercice 13.
Linéariser les polynômes trigonométriques suivants $f_1(\varphi) = \sin\varphi\sin 4\varphi$, $f_2(x) = \cos^2(2x)\sin(3x)$ et $f_3(t) = \cos(3t)\cos(4t)$.

Exercice 14.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
▶1. $z^2 - 5z + 9 = 0$ ▶2. $z^2 - 4z + 1 = 0$
▶3. $2z^2 - 6z + 5 = 0$ ▶4. $4z^2 + 4z + 1 = 0$

Exercice 15.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
▶1. $z^2+6z+34=0$ ▶2. $z^2-4z+8=0$
▶3. $9z^2-12z+4=0$ ▶4. $2z^2-z+1=0$

Exercice 16.
Factoriser les polynômes suivants et déterminer leurs racines dans $\mathbb{C}$:
▶1. $f_1(z)=z^2+1$ ▶2. $f_2(z)=-z^2-z$
▶3. $f_3(z)=-z^2+1$ ▶4. $f_4(z)=-z^2-1$

Exercice 17.
Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:
▶1. $4z^2=3$ ▶2. $9z^2=-4$
▶3. $z^2=2z$ ▶4. $z^2=-5$

Exercice 18. En électricité.
▶1. *Somme de deux nombres complexes*
On considère les nombres complexes $z_1=\mathrm{A}_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=\mathrm{A}_2e^{i\varphi_2}$ et $z=\mathrm{A}e^{i\varphi}$ avec $\varphi\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. On pose $z=z_1+z_2$.
a) Démontrer que
$$\begin{cases}\mathrm{A}\cos\varphi=\mathrm{A}_1\cos\varphi_1+\mathrm{A}_2\cos\varphi_2\\ \mathrm{A}\sin\varphi=\mathrm{A}_1\sin\varphi_1+\mathrm{A}_2\sin\varphi_2\end{cases}$$
b) Exprimer A en fonction de A_1, A_2 et $\cos(\varphi_1-\varphi_2)$. Donner une expression de $\tan\varphi$ en fonction de A_1, A_2 et de lignes trigonométriques de φ_1 et φ_2.
▶2. *Représentation géométrique d'une somme*
Dans cette question, $\mathrm{A}_1=2$, $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{A}_2=3$, $\varphi_2=\frac{\pi}{12}$.
a) Placer M_1, M_2, M les points d'affixe complexes z_1, z_2 et z dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$. Déterminer approximativement la forme polaire de z.
b) En remarquant que $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$, déterminer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$. Calculer A et $\tan\varphi$.
▶3. *Représentation de Fresnel*
En électricité, on utilise fréquemment des fonctions sinusoïdales de la forme $t\mapsto \mathrm{A}\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$ où A > 0 est la valeur efficace, $\omega>0$ la pulsation et φ la phase à l'origine.
Soit f_1 et f_2 deux fonctions sinusoïdales de même pulsation $\omega>0$:
$f_1(t)=\mathrm{A}_1\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_1)$ et $f_2(t)=\mathrm{A}_2\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi 2$.
On considère deux nombres complexes $u_1=\mathrm{A}_1e^{i(\omega t+\varphi_1)}$ et $u_2=\mathrm{A}_2e^{i(\omega t+\varphi_2)}$.
a) Montrer qu'il existe des réels A >0 et φ tels que $u_1+u_2=\mathrm{A}e^{i(\omega t+\varphi)}$. En déduire que la somme de deux fonctions sinusoïdales de même pulsation ω est une fonction sinusoïdale de pulsation ω.
b) Un repère orthonormal du plan $(\mathrm{O},\vec{u},\vec{v})$ étant choisi, la représentation de Fresnel de la fonction sinusoïdale $t\mapsto \mathrm{A}\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi)$ est le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ d'affixe $z=\mathrm{A}e^{i\varphi}$. Soit $f_1(t)=2\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$ et $f_2(t)=3\sqrt{2}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{12}\right)$.
Représenter les vecteurs de Fresnel de ces deux fonctions et leur vecteur somme. Calculer la phase à l'origine et la valeur efficace de la somme de ces deux fonctions.
Bonus : Reprendre cette question pour :
$f_1(t)=3\sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right)$ et $f_2(t)=\sqrt{8}\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)$