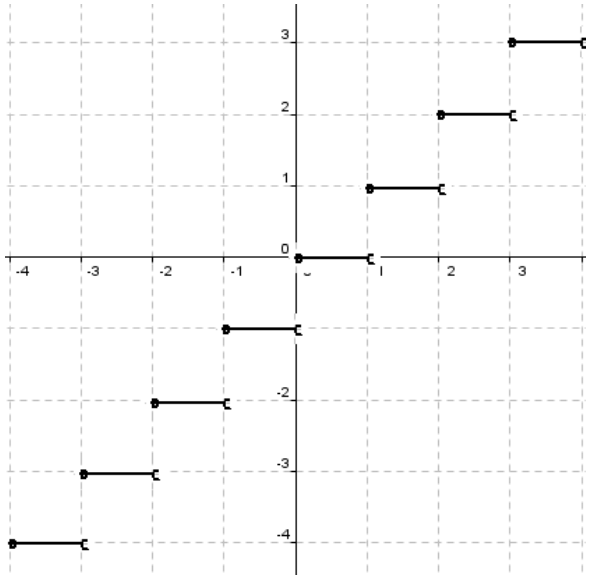
Les fonctions

Exercice 1.

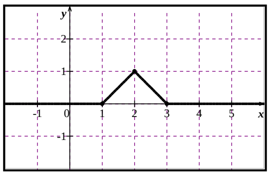
Soit E la fonction qui, à tout nombre réel t, associe le plus grand nombre entier relatif E(t) inférieur ou égal à t.

1. E(1,2)=1, E(1)=1, E(0,2)=0 et E(–0,2)=-1.
2.



Exercice 2.

Soit le signal s défini sur [0,5] par le graphique ci-après.



Déterminer l'expression de s(t) en fonction de t sur des intervalles à préciser.

S(t) =0 sur [0 ;1] et sur [3 ;5]

S(t) = t – 1 sur [1 ;2]

S(t) = -t+3 sur [2 ;3]

Exercice 3.

Simplifier l'écriture des expressions suivantes : $A = \ln e^{-1} = -1$, $B = \ln e^2 = 2$, $C = e^{\ln 2} = 2$ et $D = e^{-\ln 3} = \frac{1}{e^{\ln 3}} = \frac{1}{3}$.

Exercice 4.

Simplifier l'écriture des expressions suivantes : $A = \ln\sqrt{e} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}$, $B = \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = -\ln\sqrt{e} = \frac{-1}{2}$, $C = e^{2\ln 2} = e^{\ln 4} = 4$ et $D = e^{\frac{1}{2}\ln 3} = e^{\ln\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Exercice 5.

Résoudre dans P les équations :

$a)$ $\ln t + \frac{1}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \ln t = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow e^{\ln t} = e^{-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow t = e^{-\frac{1}{2}}$

$b)$ $e^t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow e^t = 2$

$\Leftrightarrow \ln(e^t) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow$ t = ln(2)

Exercice 6.

Résoudre dans P les équations :

$a)$ $2\ln x = \ln 3 + \ln(2x+3)$

$\Leftrightarrow \ln(x^2) = \ln\big(3(2x+3)\big)$ $\Leftrightarrow$ $x^2 = 6x + 9$

$\Leftrightarrow$ $0 = x^2 - 6x - 9$ $\Leftrightarrow$ $\Delta = 72$ et on a deux sols : $x = \frac{6\pm 6\sqrt{2}}{2} = 3 \pm 3\sqrt{2}$

$b)$ $e^{2t} - 4e^t + 3 = 0$

on pose x = e^t il ne restera plus qu'à résoudre : $x^2-4x+3=0$ et à faire un changement de variable sur les solutions obtenues.

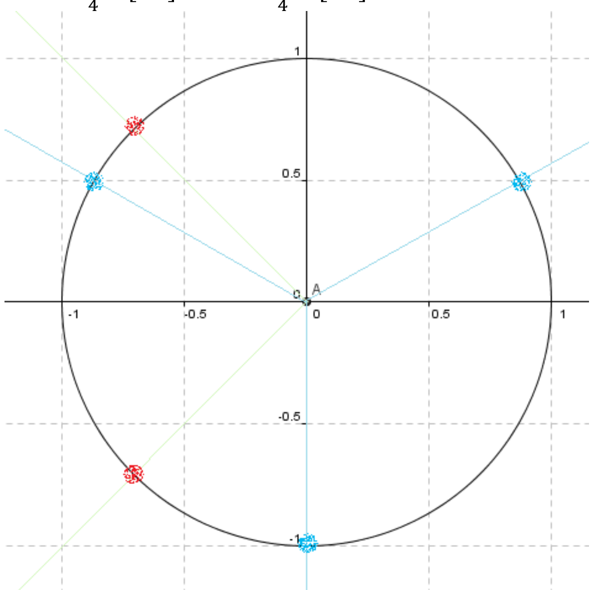
$x^2-4x+3=0$ $\Leftrightarrow$ $\Delta = 4$ $x = \frac{4\pm 2}{2}$ soit deux x possibles 1 et 3, de plus on sait que x = e^t donc on aura deux t possibles : ln(1)=0 et ln(3)

Exercice 7.

$\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\Leftrightarrow t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$ ou $t - \frac{\pi}{4} = \frac{-\pi}{2} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow t = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$ ou $t = \frac{-\pi}{4} \quad [2\pi]$



J'ai représenté en rouge les solutions de l'équation de l'exercice 7 et en bleu celles de l'exercice 8.

Exercice 8.

Résoudre dans $[0, \frac{5\pi}{3}]$ l'équations $1 - \sin 3t = 0$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

$1 - \sin 3t = 0 \Leftrightarrow 1 = \sin 3t \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 3t$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = 3t\ [2\pi]$ ou $\pi - \frac{\pi}{2} = 3t\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} = t\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $\frac{\pi}{6} = t\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ or on est dans : $[0, \frac{5\pi}{3}]$

$\Leftrightarrow$ on a comme solutions $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

Exercice 9.

$f(t) = 1 + \ln t$ est une fonction croissante (trivial) de plus on sait que ln(e)=1 et donc $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$ donc f est négative sur $]0 ; \frac{1}{e}[$, nulle en $\frac{1}{e}$ et positive après.

Exercice 10.

$f(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x}$,

on sait que e^{-x} est toujours positif donc le signe de f(x) est celui de $-x^2+2x$

$-x^2+2x = (2-x)x$ f est donc positive ou nulle sur [0 ;2] et négative le reste du temps.

Exercice 11.

$f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ est croissante (trivial) pour trouver le signe de f(t) en fonction de t il nous suffit donc de trouver pour quelle valeur de t est ce que f(t) s'annule. $e^{\frac{t}{5}} - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $e^{\frac{t}{5}} = 1 \Leftrightarrow$ t/5 = 0 $\Leftrightarrow$ t = 0, donc f est négative jusqu'à 0 où elle s'annule puis elle est positive.

Exercice 12.

$f(x) = 3e^{-x} - 1$ est comme e^{-x} une fonction décroissante, $3e^{-x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \frac{1}{3}$
$\Leftrightarrow -x = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = -\ln\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x = \ln(3)$
Donc jusqu'à ln(3) la fonction est à valeur positive, elle s'annule en ln(3) puis sera négative.

Exercice 13.

a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6 = x^2\left(-2 + \frac{5}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$

En $-\infty$ comme en $+\infty$ x² a pour limite $+\infty$ et la parenthèse a pour limite -2 donc on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

b) $f(x) = -x^3 + 2x + 3 = x^3\left(-1 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$

En $-\infty$ comme en $+\infty$ la parenthèse a pour limite -1.
$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +1$ donc on a :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Exercice 14.

Déterminer les limites en 4 et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$ définie sur]4,+∞[.
$\lim\limits_{x\to4^+} x - 4 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to4^+} 2x + 5 = 13$ donc
$\lim\limits_{x\to4^+} f(x) = +\infty$
$f(x) = \frac{2x+5}{x-4} = \frac{2+\frac{5}{x}}{1-\frac{4}{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{4}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \frac{5}{x} = 2$ donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$

Exercice 15.

Déterminer les limites en −1 et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+1}$ définie sur]−1,+∞[.
$\lim\limits_{x\to-1^+} x + 1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to-1^+} 3x^2 - 5 = -2$ donc
$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$
$f(x) = \frac{3x^2-5}{x+1} = \frac{3x-\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x - \frac{5}{x} = +\infty$ donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 16.

Déterminer les limites en 0 et en +∞ de la fonction $f(x) = x + \ln x$ définie sur]0,+∞[.
Les limites de f sont triviales : $-\infty$ et $+\infty$

Exercice 17.

Déterminer les limites en 0 et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ définie sur]0,+∞[.
En $+\infty$ la limite est $+\infty$ (trivial)
$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x = \frac{1+x\ln x}{x}$
$\lim\limits_{x\to0^+} x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 1 + x\ln x = 1$ donc
$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

Exercice 18.

les limites en −∞ et en +∞ de la fonction $f(x) = e^x + e^{-x}$ sont toutes les deux +∞

Exercice 19.

On a $f(x) = e^x - 3x$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$ donc
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$f(x) = e^x - 3x = e^x\left(1 - \frac{3x}{e^x}\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3x}{e^x} = 1$ donc
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exercice 20.

Soit $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$ définie sur]1,+∞[.
1.
$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \frac{ax^2-ax+bx-b+c}{x-1}$.
Par identification on doit avoir a =1 ; b-a = 3 et c – b = 1
Donc a = 1, b= 4 et c = 5 donc $f(x) = x + 4 + \frac{5}{x-1}$
2. la courbe représentative C de *f* admet une asymptote oblique *d* d'équation y = x + 4.
3. Etudier la position de C par rapport à *d* sur]1,+∞[.

Le signe de $h(x) = f(x) - y = \frac{5}{x-1}$ nous donne la position de C par rapport à d.
h(x) est négative avant 1 et positive après, donc C est sous d pour les points d'abscisses inférieures à 1 et au-dessus pour les autres.

Exercice 21.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4$ donc $f'(x) = x^2 + \frac{4}{3}x$
b) $f(x) = (-3x+1)^2$ donc $f'(x) = -3 \times 2(-3x+1)$ =18x - 6

Exercice 22.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
a) $f(x) = \frac{3x-7}{-x+3}$ donc $f'(x) = \frac{3(-x+3)-(3x-7)(-1)}{(-x+3)^2}$
$= \frac{-3x+9+3x-7}{(-x+3)^2} = \frac{2}{(-x+3)^2}$.
b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$ donc
$f'(x) = \frac{2(x+1)(x^2+x+1)-(2x+1)(x+1)^2}{(x^2+x+1)^2}$
$= \frac{(2x^3+4x^2+4x+2)-(2x^3+5x^2+4x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$

Exercice 23.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ donc $f'(t) = -3\sin\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$.
b) $f(t) = \sin^2 t$ donc $f'(t) = 2\sin(t)\cos(t)$.
c) $f(t) = \cos^2 3t$ donc $f'(t) = -2 \times 3\sin(3t)\cos(3t)$.

Exercice 24.

$f(x) = \sqrt{-3x+2}$ donc $f'(x) = \frac{-3}{2\sqrt{-3x+2}}$.

Exercice 25.

a) $f(x) = x\ln x$ donc $f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$.
b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ donc $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - 1\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$
c) $f(t) = 2t - e^{-t}$ donc $f'(x) = 2 + e^{-t}$
d) $f(t) = te^t$ donc $f'(x) = e^t + te^t$

Exercice 26.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
a) $f(x) = (\ln x)^2$ donc $f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x$
b) $f(x) = \ln(2x+3)$ donc $f'(x) = 2 \times \frac{1}{2x+3}$
c) $f(t) = e^{t^2}$ donc $f'(x) = 2te^{t^2}$
d) $f(t) = \frac{e^t+1}{e^t-1}$ donc $f'(x) = \frac{e^t(e^t-1)+e^t(e^t+1)}{(e^t-1)^2} = \frac{2e^{2t}}{(e^t-1)^2}$

Exercice 27.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :
a) $f(x) = x\mathrm{Arccos}x$ donc $f'(x) = \mathrm{Arccos}x + x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
b) $f(x) = x\mathrm{Arcsin}x$ donc $f'(x) = \mathrm{Arcsin}x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
c) $f(x) = \mathrm{Arctan}2x$ donc $f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2}$

Exercice 28.

1. $f(0)=0$, $f(1)=-2$ et $f'(1)=0$.
2. Résoudre graphiquement sur $[-1,2]$ les inéquations suivantes :
a) $f'(x) > 0$ $S =]1;2]$ (f décroissante)
b) $f'(x) \leq 0$ $S = [-1;1]$ (f croissante)
3. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* sur $[-1,2]$.trivial : voir question précédente
4. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx + c$. donc $f'(x) = 3ax^2 + b$
f'(1)=0 donc 3a+ b= 0 ou encore b = -3a
de plus f(0) = 0 donc c= 0
de plus f(1)= -2 donc a + b = - 2 et donc -2a = -2 donc a = 1 or b = -3a donc $b = -3$
5. sur $[-1,2]$, $f(x) = 0$ ⇔ x=0 par lecture graphique.

Exercice 29.

1. Donner le tableau de variation de *f est croissante sur [-1 ;0] et sur [2 ;3], décroissante sur [0 ;2].*
2. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Donc $f'(x) = a3x^2 + b2x + c$ Calculer les nombres *a*, *b*, *c* et *d*.
On sait que f(-1)=-3 , f(0) = 1, f'(0)=0 et f(1)=-1

$$\begin{cases} -a+b-c+d=-3 \\ d=1 \\ c=0 \\ a+b+c+d=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+b+1=-3 \\ d=1 \\ c=0 \\ a+b+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+2=-4 \\ d=1 \\ c=0 \\ a+b+1=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ d=1 \\ c=0 \\ a+b+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-3 \\ d=1 \\ c=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = a - 3x^2 + 1$$

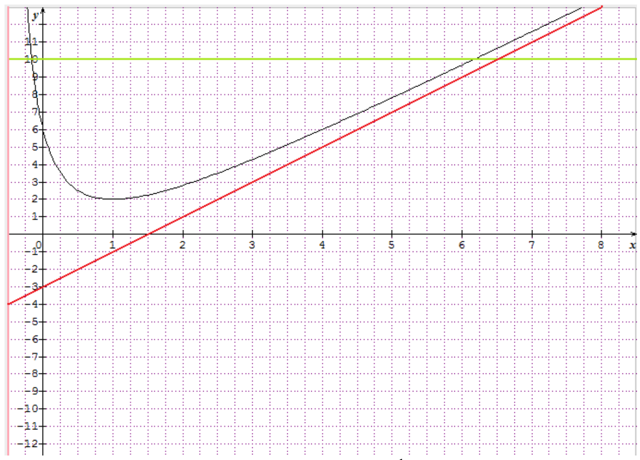
Exercice 30.

On considère la fonction *f* définie sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{9}{2x+1}$.
1. $\lim_{x\to\frac{-1}{2}} 2x - 3 = -4$, $\lim_{x\to\frac{-1}{2}} \frac{9}{2x+1} = +\infty$
donc $\lim_{x\to\frac{-1}{2}} f(x) = +\infty$.
la courbe représentative de *f* admet donc une asymptote verticale d'équation : x=$\frac{-1}{2}$?
2 *a)* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
b) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)] = 0$. La courbe représentative de *f* admet donc une asymptote oblique d'équation : y = $2x - 3$?
c) $f(x) - (2x-3) = \frac{9}{2x+1}$ fonction négative avant -1/2 et positive après ce qui veut dire que la courbe est en dessous de l'asymptote avant -1/2 et au dessus après.
3. $f'(x) = 2 + \frac{-9}{(2x+1)^2} = \frac{2(2x+1)^2-9}{(2x+1)^2} = \frac{\left[\sqrt{2}(2x+1)\right]^2-3^2}{(2x+1)^2}$
$= \frac{\left[\sqrt{2}(2x+1)\right]^2-3^2}{(2x+1)^2} = \frac{\left(\sqrt{2}(2x+1)-3\right)\left(\sqrt{2}(2x+1)+3\right)}{(2x+1)^2} =$
$\frac{(2\sqrt{2}x+\sqrt{2}-3)(2\sqrt{2}x+\sqrt{2}+3)}{(2x+1)^2} = \frac{2\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}}\right)2\sqrt{2}\left(x+\frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}\right)}{(2x+1)^2}$
En posant $x_1 = \frac{-\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}$ et $x_2 = -\frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}}$ on a :

$$f'(x) = \frac{8(x-x_1)(x-x_2)}{(2x+1)^2}$$

Sur $[x_2; x_1]$ f' est négative (et donc f est décroissante) en dehors f' est positive (et donc f est croissante).

4.



5. Soit l'équation $f(x) = 10$ sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$
a) graphiquement il y a une solution négative valant approximativement x = -0.15 et une positive d'environ 6,2.
b) arrondies à 10^{-2}.les solutions sont : -0,16 et 6,16

Exercice 31.

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x} - 2 = (1+2\ln x)\frac{1}{x} - 2$.
1. $\lim_{x\to0^+} 1 + 2\ln x = -\infty$ et $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ Donc $\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ donc asymptote verticale d'équation x=0
2. $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x} - 2 = \frac{1}{x} + 2\frac{\ln x}{x} - 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 2 = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=-2, donc la courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation y = -2

3. $f'(x) = \frac{\frac{2}{x}x-(1+2\ln x)}{x^2} = \frac{1-2\ln x}{x^2}$ or 1-2ln x = 0

⇔ ln(x)= ½ ⇔ $x = e^{\frac{1}{2}}$. De plus 1-2ln x est une fonction décroissante donc f' est positive avant et positive après donc f est croissante sur]0 ; $e^{\frac{1}{2}}$] et décroissante sur [$e^{\frac{1}{2}}$,+∞[

4.

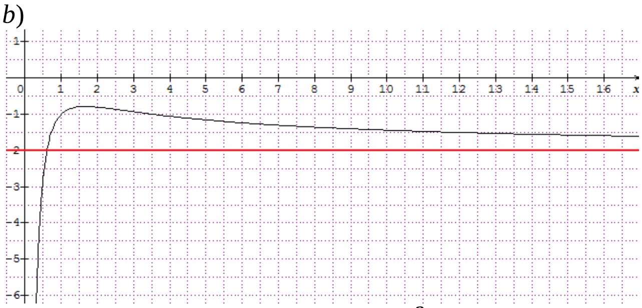
a) c'est un point dont l'abscisse vaut environ 0,6.

Pour plus de précision il faut résoudre $f(x) = -2$

⇔ $\frac{1+2\ln x}{x} - 2 = -2$ ⇔ $\frac{1+2\ln x}{x} = 0$ ⇔ $1 + 2\ln x = 0$

⇔ $\ln(x) = -\frac{1}{2}$ ⇔ $x = e^{-\frac{1}{2}}$

b)



5. Soit la fonction F$(x) = \ln x + (\ln x)^2 - 2x$ définie sur l'intervalle]0,+∞[.

a) $\mathrm{F}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\mathrm{x}} + 2\frac{1}{\mathrm{x}}\ln x - 2\,\frac{1+2\ln x}{x} - 2 = f(x)$.

b) f étant tout le temps négative F sera décroissante.

Exercice 32.

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0,+∞[par $f(x) = -x + 2 + \frac{e}{e^x}$. On appelle c la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2 cm.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x+2 = -\infty$. et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

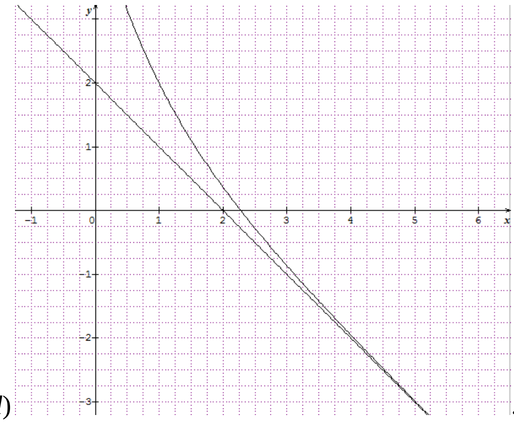
2. $f'(x) = -1 - \frac{e}{e^x}$ donc f' est toujours négative et donc f est décroissante sur son ensemble de définition.

3. *a*) f(x)-y = $\frac{e}{e^x}$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e}{e^x} = 0$ donc la droite Δ : *y* = –*x*+2 est une asymptote à la courbe c en +∞.

b) $\frac{e}{e^x}$ est tout le temps positif donc la courbe représentative de la fonction est toujours au-dessus de l'asymptote oblique Δ

c) l'unité étant de 2cm, 0,5 mm sur le dessin correspond à un écart de 0,025 unités. $\frac{e}{e^x} < 0{,}025$ ⇔ $e^{1-x} < 0{,}025$ ⇔ 1-x < ln (0,025) ⇔ 1- ln(0,025) < x donc les points seront indiscernables à partir de 4,69 unités , c'est-à-dire à partir de 93,8mm de l'axe des ordonnées.

d)



.

Exercice 33.

Déterminer les primitives des fonctions :

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ donc $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + c$

b) $f(t) = (t-1)^3$ donc $F(t) = \frac{(t-1)^4}{4}$ + cte

Exercice 34.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(t) = (2t-5)^3 = \frac{1}{2}2(2t-5)^3$

donc $F(t) = \frac{1}{2}\frac{(2t-5)^4}{4}$ + cte $= \frac{(2t-5)^4}{8}$ + cte

b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$

donc $F(t) = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ + 3x + cte

Exercice 35.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (2x+1)(x^2+\mathrm{x}+3)$

donc F(x) =$\frac{(x^2+\mathrm{x}+3)^2}{2}$

b) $f(x) = 3x + 4 - \frac{2}{x}$ donc

F(x) =$\frac{3x}{2}$ + 4x – 2 ln(x) + cte

c) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ donc

F(x) =ln$(x+3)$ + cte

Exercice 36.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ de plus $x^2 - x + 1$ est toujours positif donc $F(x) = \ln(x^2 - x + 1) + cte$

b) $f(t) = \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2t}{1+t^2}$ de plus $1 + t^2$ est toujours positif donc $F(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + cte$

Exercice 37.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 6x^2 - \frac{4}{x^2}$

donc $F(x) = 6\frac{\mathrm{x}^3}{3} + 4\frac{1}{\mathrm{x}}$ + cte = 2x³ + $\frac{4}{\mathrm{x}}$ + cte

b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}$

donc $F(x) = \mathrm{x} + \frac{1}{\mathrm{x}} - \frac{3}{3x^3}$ + cte = x + $\frac{1}{\mathrm{x}} - \frac{1}{x^3}$ + cte

Exercice 38.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$ et $x^2 + x - 2 > 0$ sur]–2,1[

donc $F(x) = \frac{-1}{x^2+x-2} + cte$
b) $f(t) = \frac{3t}{(t^2+1)^2} = \frac{3}{2}\frac{2t}{(t^2+1)^2}$
donc $F(t) = \frac{3}{2}\frac{-1}{t^2+1} + cte$

Exercice 39.

Soit la fonction $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{4x-6}$ définie sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$
a) Déterminer trois nombres a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x-6}$ pour tout $x \in]-\infty,\frac{3}{2}[$.
$ax + b + \frac{c}{4x-6} = \frac{(ax+b)(4x-6)+c}{4x-6} = \frac{4ax^2+x(4b-6a)+c-6b}{4x-6}$
Par identification on a :
$\begin{cases} 4a = 2 \\ 4b - 6a = -1 \\ c - 6b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ 4b = -1 + 3 \\ c - 6b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{2}{4x-6}$ pour tout $x \in]-\infty,\frac{3}{2}[$.
b) $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{4}{4x-6}$ on aura donc sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$
$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{2}\ln(|4x-6|) + cte$
$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{2}\ln(6-4\mathrm{x}) + cte$

Exercice 40.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
a) $f(x) = \sin(3x)$
donc on aura $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x) + cte$
b) $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
donc on aura $F(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + cte$
c) $f(x) = \tan x = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$
donc $F(x) = \ln(|cos(x)|) + cte$ et comme on est sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ on aura $F(x) = \ln(cos(x)) + cte$

Exercice 41.

Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
a) $f(x) = -2\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$
donc on aura $F(x) = \frac{2}{5}\cos\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + cte$
b) $f(x) = \cos x \times \sin^2 x$
donc on aura $F(x) = \frac{\sin^3 x}{3} + cte$
c) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$
donc on aura $F(x) = \frac{-1}{\cos x} + cte$

Exercice 42.

On sait que $\cos^2 a = \frac{\cos(2a)-1}{2}$
donc $f(t) = \cos^2 2t = \frac{\cos(4t)-1}{2}$
donc $F(t) = \frac{\sin(4t)}{8} - \frac{1}{2}t + cte$

Exercice 43.

$f(t) = \sin t\cos 3t = \frac{1}{2}(\sin(4t) - \sin(2t))$
Donc $F(t) = \frac{-\cos(4t)}{8} + \frac{1}{4}\cos(2t) + cte$

Exercice 44.

a) $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t-3}} = 2\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec u=t-3 sur $]3,+\infty[$
donc $F(t) = 2\sqrt{t-3} + \text{cte}$
b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} = \left(\sqrt{x^2+1}\right)'$
donc $F(x) = \sqrt{x^2+1} + \text{cte}$

Exercice 45.

a) $f(t) = \frac{e^t}{5}$ donc $F(t) = \frac{e^t}{5} + \text{cte}$
b) $f(x) = e^{2x+3}$ donc $F(x) = \frac{e^{2x+3}}{2} + \text{cte}$

Exercice 46.

a) $f(t) = 7e^{-t}$ donc $F(t) = -7e^{-t} + cte$
b) $f(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}2xe^{x^2}$ donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2} + cte$

Exercice 47.

a) $f(t) = -e^t + 2e^{-t}$ donc $F(t) = -e^t - 2e^{-t} + cte$
b) $f(x) = e^{2x} + e^x - 1$
donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{2\mathrm{x}} + e^x - \mathrm{x} + cte$

Exercice 48.

a) $f(t) = \frac{-2}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1,1[$donc $F(t) = 2Arccos(t) + cte$
b) $f(x) = \frac{-3}{1+x^2}$ donc $F(x) = -3\mathrm{Arctan}(\mathrm{x}) + cte$

Exercice 49.

a) $f(t) = \frac{2}{\sqrt{1-4t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2t)^2}}$ sur $]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[$
donc $F(t) = Arcsin(2t) + cte$
b) $f(x) = \frac{2}{1+(2x)^2}$ donc $F(x) = \mathrm{Arctan}(2\mathrm{x}) + cte$

Exercice 50.

a) On a $F(t) = t\ln t$ sur $]0,+\infty[$
$f(t) = \ln(t) + t\frac{1}{t} = \ln(t) + 1$
b) $g(t) = \ln t = f(t) - 1$ donc $G(t) = F(t) - t + cte$
donc $G(t) = t\ln t - t + cte$.