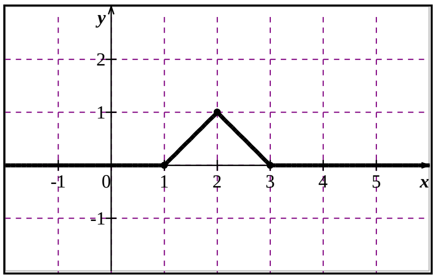
Les fonctions

Exercice 1.
Soit E la fonction qui, à tout nombre réel *t*, associe le plus grand nombre entier relatif E(*t*) inférieur ou égal à *t*.
▶1. Déterminer E(1,2), E(1), E(0,2) et E(–0,2).
▶2. Tracer dans un repère orthonormal la représentation graphique de la fonction E sur l'intervalle [–4,4].

Exercice 2.
Soit le signal s défini sur [0,5] par le graphique ci-après.



Déterminer l'expression de s(*t*) en fonction de *t* sur des intervalles à préciser.

Exercice 3.
Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$\mathrm{A} = \ln e^{-1}$, $\mathrm{B} = \ln e^{2}$, $\mathrm{C} = e^{\ln 2}$ et $\mathrm{D} = e^{-\ln 3}$.

Exercice 4.
Simplifier l'écriture des expressions suivantes :
$\mathrm{A} = \ln\sqrt{e}$, $\mathrm{B} = \ln\frac{1}{\sqrt{e}}$, $\mathrm{C} = e^{2\ln 2}$ et $\mathrm{D} = e^{\frac{1}{2}\ln 3}$.

Exercice 5.
Résoudre dans ℝ les équations :
a) $\ln t + \frac{1}{2} = 0$ *b*) $e^t - 2 = 0$

Exercice 6.
Résoudre dans ℝ les équations :
a) $2\ln x = \ln 3 + \ln(2x + 3)$ *b*) $e^{2t} - 4e^t + 3 = 0$

Exercice 7.
Résoudre dans ℝ l'équation $\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 8.
Résoudre dans $[0, \frac{5\pi}{3}]$ l'équations $1 - \sin 3t = 0$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 9.
Etudier le signe de la fonction $f(t) = 1 + \ln t$ lorsque *t* varie dans l'intervalle]0,+∞[.

Exercice 10.
Etudier le signe de la fonction $f(x) = (-x^2 + 2x)e^{-x}$ lorsque *x* varie dans ℝ.

Exercice 11.
Etudier le signe de la fonction $f(t) = e^{\frac{t}{5}} - 1$ lorsque *t* varie dans ℝ.

Exercice 12.
Etudier le signe de la fonction $f(x) = 3e^{-x} - 1$ lorsque *x* varie dans ℝ.

Exercice 13.
Déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ lorsque :
a) $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$
b) $f(x) = -x^3 + 2x + 3$

Exercice 14.
Déterminer les limites en 4 et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$ définie sur]4,+∞[.

Exercice 15.
Déterminer les limites en −1 et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+1}$ définie sur]–1,+∞[.

Exercice 16.
Déterminer les limites en 0 et en +∞ de la fonction $f(x) = x + \ln x$ définie sur]0,+∞[.

Exercice 17.
Déterminer les limites en 0 et en +∞ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ définie sur]0,+∞[.

Exercice 18.
Déterminer les limites en –∞ et en +∞ de la fonction $f(x) = e^x + e^{-x}$ définie sur ℝ.

Exercice 19.
Déterminer les limites en –∞ et en +∞ de la fonction $f(x) = e^x - 3x$ définie sur ℝ.

Exercice 20.

Soit $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x-1}$ définie sur]1,+∞[.

1. Déterminer a, b et c tels que pour tout x de]1,+∞[, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$.
2. En déduire que la courbe représentative c de f admet une asymptote oblique d dont on donnera une équation.
3. Etudier la position de c par rapport à d sur]1,+∞[.

Exercice 21.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 4$ sur ℝ.

b) $f(x) = (-3x+1)^2$ sur ℝ.

Exercice 22.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \frac{3x-7}{-x+3}$ sur]–∞,3[.

b) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1}$ sur ℝ.

Exercice 23.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(t) = \cos\left(3t + \frac{\pi}{3}\right)$ sur ℝ.

b) $f(t) = \sin^2 t$ sur P.   *c*) $f(t) = \cos^2 3t$ sur ℝ.

Exercice 24.

Déterminer la dérivée de la fonction $f(x) = \sqrt{-3x+2}$ définie sur]–∞,$\frac{2}{3}$[.

Exercice 25.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x\ln x$ sur]0,+∞[.

b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur]0,+∞[.

c) $f(t) = 2t - e^{-t}$ sur ℝ.

d) $f(t) = te^t$ sur ℝ.

Exercice 26.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

a) $f(x) = (\ln x)^2$ sur]0,+∞[.

b) $f(x) = \ln(2x+3)$ sur]$-\frac{3}{2}$,+∞[.

c) $f(t) = e^{t^2}$ sur ℝ.   *d*) $f(t) = \frac{e^t+1}{e^t-1}$ sur]0,+∞[.

Exercice 27.

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes :

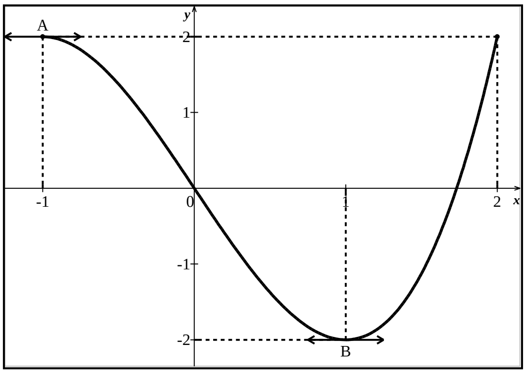
a) $f(x) = x\mathrm{Arccos}x$ sur]–1,1[.

b) $f(x) = x\mathrm{Arcsin}x$ sur]–1,1[.

c) $f(x) = \mathrm{Arctan}2x$ sur ℝ.

Exercice 28.

Soit f la fonction définie sur [–1;2] dont la courbe c est représentée ci-dessous.



1. Utiliser le graphique pour déterminer les nombres $f(0)$, $f(1)$ et $f'(1)$.
2. Résoudre graphiquement sur [–1,2] les inéquations suivantes :

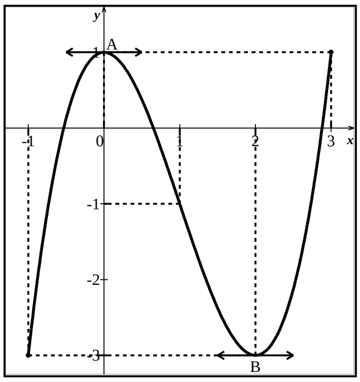
a) $f'(x) > 0$

b) $f'(x) \leq 0$

3. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur [–1,2].
4. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx + c$. Calculer les nombres a, b et c.
5. Résoudre, sur [–1,2], $f(x) = 0$.

Exercice 29.

Soit f la fonction définie sur [–1;3] dont la courbe c est représentée ci-dessous.



1. Donner le tableau de variation de f.

2. On suppose que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calculer les nombres a, b, c et d.

Exercice 30.
On considère la fonction *f* définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par $f(x) = 2x - 3 + \frac{9}{2x+1}$.
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{-1}{2}} f(x)$, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de *f* ?
2 *a*) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)]$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de *f* ?
c) Etudier la position de la courbe de *f* par rapport à son asymptote.
3. Déterminer la dérivée *f'* de *f*. En déduire le sens de variation de *f* sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et son tableau de variations.
4. Dans un repère orthogonal, représenter graphiquement la fonction *f* et ses asymptotes.
5. Soit l'équation $f(x) = 10$ sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$
a) Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de cette équation.
b) Vérifier ce résultat par le calcul et en déduire la valeur approchée de ces solutions arrondie à 10^{-2}.

Exercice 31.
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1+2\ln x}{x} - 2$.
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to0} f(x)$, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de *f* ?
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, que peut-on en déduire pour la courbe représentative de *f* ?
3. Déterminer la dérivée *f'* de *f*. En déduire le sens de variation de *f* sur $]0,+\infty[$ et son tableau de variations.
4. Soit c la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 1 cm.
a) Déterminer le point d'intersection de la courbe c et de son asymptote parallèles à l'axe des abscisses.
b) Tracer la courbe c.
5. Soit la fonction $\mathrm{F}(x) = \ln x + (\ln x)^2 - 2x$ définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
a) Vérifier que la dérivée de F est *f*.
b) Donner le tableau de variation de F.

Exercice 32.
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $f(x) = -x + 2 + \frac{e}{e^x}$. On appelle c la courbe représentative de *f* dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm.
1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Déterminer la dérivée *f'* de *f*. En déduire le sens de variation de *f* sur $[0,+\infty[$ et son tableau de variations.
3. *a*) Démontrer que la droite $\Delta : y = -x+2$ est une asymptote à la courbe c en $+\infty$.
b) Etudier la position de c par rapport à son asymptote.
c) On désigne par M et N les points de même abscisse *x* appartenant respectivement à c et Δ. On juge que deux points sont indiscernables sur la figure lorsque la distance qui les sépare est inférieure à 0,5 mm. Pour quels réel *x* les points M et N sont-ils indiscernables ?
d) Dans le repère $\left(0,\vec{i},\vec{j}\right)$, représenter graphiquement la fonction *f* et son asymptote.

Exercice 33.
Déterminer les primitives des fonctions :
a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(t) = (t-1)^3$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 34.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
a) $f(t) = (2t-5)^3$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 35.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
a) $f(x) = (2x+1)(x^2 + \mathrm{x} + 3)$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(x) = 3x + 4 - \frac{2}{x}$ sur $]-\infty,0[$
c) $f(x) = \frac{1}{x+3}$ sur $]-3,+\infty[$

Exercice 36.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ sur $\mathbb{R}$
b) $f(t) = \frac{t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 37.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
a) $f(x) = 6x^2 - \frac{4}{x^2}$ sur $]-\infty,0[$
b) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}$ sur $]0,+\infty[$

Exercice 38.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$ sur $]-2,1[$
$b)\ f(t)=\frac{3t}{(t^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 39.
Soit la fonction $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{4x-6}$ définie sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$
a) Déterminer trois nombres a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{4x-6}$ pour tout $x\in]-\infty,\frac{3}{2}[$.
b) Déterminer les primitives de la fonction f sur $]-\infty,\frac{3}{2}[$.

Exercice 40.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(x)=\sin(3x)$ sur $\mathbb{R}$
$b)\ f(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ sur $\mathbb{R}$
$c)\ f(x)=\tan x$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

Exercice 41.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(x)=-2\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$
$b)\ f(x)=\cos x\times\sin^2 x$ sur $\mathbb{R}$
$c)\ f(x)=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

Exercice 42.
Déterminer les primitives de la fonction $f(t)=\cos^2 2t$ définie sur $\mathbb{R}$ après l'avoir linéariser.

Exercice 43.
Déterminer les primitives de la fonction $f(t)=\sin t\cos 3t$ définie sur $\mathbb{R}$ après l'avoir linéariser.

Exercice 44.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(t)=\frac{1}{\sqrt{t-3}}$ sur $]3,+\infty[$
$b)\ f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 45.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(t)=\frac{e^t}{5}$ sur $\mathbb{R}$
$b)\ f(x)=e^{2x+3}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 46.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(t)=7e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$
$b)\ f(x)=xe^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 47.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(t)=-e^t+2e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$
$b)\ f(x)=e^{2x}+e^x-1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 48.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(t)=\frac{-2}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1,1[$
$b)\ f(x)=\frac{-3}{1+x^2}$ sur P

Exercice 49.
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
$a)\ f(t)=\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}$ sur $]\frac{-1}{2},\frac{1}{2}[$
$b)\ f(x)=\frac{2}{1+4x^2}$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 50.
a) Donner la dérivée de $F(t)=t\ln t$ sur $]0,+\infty[$
b) En déduire les primitives de $g(t)=\ln t$.