Intégration

Exercice 1.

$A = \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1,$

$B = \int_1^2 t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3{,}75,$

$C = \int_2^3 (x^2 + x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3$

$= \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} + 3 - \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} + 2\right) = 9 + \frac{9}{2} + 3 - \frac{8}{3} - 2 - 2$

$= \frac{37}{6}$

$D = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = [\ln(|t|)]_1^2 = [\ln(t)]_1^2$

$= \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$

$E = \int_1^2 \frac{2}{x^2} dx = \left[-2\frac{1}{x}\right]_1^2 = -1 - (-2) = 1$

$F = \int_1^2 \frac{4}{1+x} dx = [4\ln(|1+x|)]_1^2$

$= [4\ln(1+x)]_1^2 = 4\ln(3) - 4\ln(2)$

$= 4(\ln(3) - \ln(2)) = 4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Exercice 2.

$G = \int_{-1}^1 3dx = [3x]_{-1}^1 = 3 - (-3) = 6$

$H = \int_0^1 (4+t)^3 dt = \left[\frac{(4+t)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{5^4}{4} - \frac{4^4}{4} =$
$\frac{625-256}{4} = \frac{369}{4}.$

Exercice 3.

$I = \int_0^2 (x^2 - 3x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{2^3}{3} -$
$3\frac{2^2}{2} + 2 - \left(\frac{0^3}{3} - 3\frac{0^2}{2} + 0\right) = \frac{8}{3} - 6 + 2 = \frac{-4}{3}$

$J = \int_1^4 (2y-1)^2 dy = \int_1^4 \frac{1}{2} 2(2y-1)^2 dy =$
$\left[\frac{1}{2}\frac{(2y-1)^3}{3}\right]_1^4 = \frac{(7)^3}{6} - \frac{(1)^3}{6} = \frac{342}{6} = 57.$

Exercice 4.

$K = \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{1}{2t-1} dt = \int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{1}{2}\frac{2}{2t-1} dt = \left[\frac{1}{2}\ln(|2t -\right.$
1323=12ln2t−1323=12ln5−12ln2=12ln52

$L = \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx = [\ln(|x-2|)]_0^1 = [\ln(2 -$
x01=ln(1) – ln(2) = -ln(2).

$M = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{x^2+1} dx = \int_0^{\sqrt{3}} 2\frac{2x}{x^2+1} dx =$
$[2\ln(|x^2+1|)]_0^1 = [2\ln(x^2+1)]_0^1 = 2\ln(2) -$
$2\ln(1) = 2\ln(2)$

$N = \int_2^e \frac{\ln t}{t} dt = \int_2^e \frac{1}{t}\ln t\, dt = \left[\frac{\ln(t)^2}{2}\right]_2^e = \frac{\ln(e)^2}{2} -$
$\frac{(\ln(2))^2}{2} = \frac{1}{2}(1 - (\ln(2))^2)$

Exercice 5.

$O = \int_0^1 e^{2t} dt = \int_0^1 \frac{1}{2} 2e^{2t} dt = \left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1$
$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

$P = \int_0^1 3e^{-2t+1} dt = \int_0^1 \frac{3}{-2}(-2)e^{-2t+1} dt$
$= \left[\frac{3}{-2}e^{-2t+1}\right]_0^1 = \frac{3}{-2}e^{-2+1} - \frac{3}{-2}e^1 = \frac{3}{2}(e^1 - e^{-1})$

Exercice 6.

$Q = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1} dx = [\ln(|e^x+1|)]_1^2 =$
$[\ln(e^x+1)]_1^2 = \ln(e^2+1) - \ln(e^1+1)$
$= \ln\left(\frac{e^2+1}{e^1+1}\right)$

$R = \int_0^1 xe^{x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} 2xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 =$
$\frac{1}{2}e^{1^2} - \frac{1}{2}e^{0^2} = \frac{1}{2}(e^1 - 1)$.

Exercice 7.

$S = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4t\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4} 4\sin 4t\ dt$
$= \left[\frac{1}{4}(-\cos 4t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$
$= \frac{1}{4}\left(-\cos 4\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}(-\cos 0) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{8}$

$T = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx$
$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{3} 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) dx$
$= \left[\frac{1}{3}\left(-\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$
$= \frac{1}{3}\left(-\cos\left(3\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right)\right) - \frac{1}{3}\left(-\cos\left(3\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)\right)$
$= \frac{-1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$
$= \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$

Exercice 8.

$U = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 3t + 2\cos 2t) dt$
$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} 3\sin 3t + 2\cos 2t\right) dt$
$= \left[\frac{1}{3}(-\cos 3t) + \sin 2t\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$
$= \frac{1}{3}\left(-\cos 3\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\frac{\pi}{6} - \left(\frac{1}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) +\right.$
sin2π4

$= \frac{-1}{3}\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{2}$
$= 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}-6}{6}$

$V = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{-\sin x}{\cos x} dx.$

$= [-\ln(|\cos x|)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = [-\ln(\cos x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}}$

$= -\ln\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) + \ln\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Exercice 9.

$\sin 4x \cos 2x = \frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i}\frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2}$

$= \frac{1}{2}\frac{e^{i6x}+e^{i2x}-e^{-i2x}-e^{-i6x}}{2i} = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)$

$W = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x \cos 2x dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 2x)dx$

$= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 6x}{6} + \frac{-\cos 2x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 6\frac{\pi}{3}}{6} + \frac{-\cos 2\frac{\pi}{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 0}{6} + \frac{-\cos 0}{2}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{6} + \frac{\frac{1}{2}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$\cos^3 t = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3t}+3e^{it}+3e^{-it}+e^{i3t}}{4\times 2}$

$= \frac{\cos(3t)}{4} + \frac{3\times\cos(t)}{4} = \frac{1}{4}(\cos(3t) + 3\cos(t))$

$X = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 t \ dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}(\cos(3t) + 3\cos(t)) \ dt.$

$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{4}\left(3\frac{1}{3}\cos(3t) + 3\cos(t)\right) dt$

$= \left[\frac{1}{4}(3\sin(3t) + 3\sin(t))\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{3}{4}\left(\sin\left(3\frac{\pi}{3}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - \left(\frac{3}{4}(\sin(0) + 3\sin 0\right.$

$= \frac{3}{4}\left(0 + 3\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{4}(0+0)\right) = \frac{9\sqrt{3}}{8}$

Exercice 10.

$\cos 3t \cos t = \frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$= \frac{e^{i4x}+e^{i2x}+e^{-i2x}+e^{-i4x}}{2\times 2}$

$= \frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2\times 2} + \frac{e^{i2x}+e^{-i2x}}{2\times 2} = \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2}$

$Y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3t \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 4x}{2} + \frac{\cos 2x}{2} dt$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} dt$

$= [2\sin(4x) + \sin(2x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 2\sin\left(4\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) - \left(2\sin\left(4\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$= 0 + 0 - (0 + 1) = -1$

$\sin 2x \sin 4x = \frac{e^{i2x}-e^{-i2x}}{2i}\frac{e^{i4x}-e^{-i4x}}{2i}$

$= \frac{e^{i6x}-e^{-i2x}-e^{+i2x}+e^{-i6x}}{-4}$

$= \frac{e^{i6x}+e^{-i6x}}{-2\times 2} - \frac{e^{-i2x}+e^{+i2x}}{-2\times 2} = \frac{\cos 6x}{-2} - \frac{\cos 2x}{-2}$

$= \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 6x}{2}$

$Z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \sin 4x \ dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 6x}{2} \ dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2} - 3\frac{\cos 6x}{6} \ dx$

$= [-\sin 2x + 3\sin 6x]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\sin 2\frac{\pi}{4} + 3\sin 6\frac{\pi}{4} - \sin 0 + 3\sin 0$

$= -1 - 3 - (0 + 0) = -4$

.

Exercice 11.

▶1.

$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b(x+1)}{(x+1)(x-1)}$

$= \frac{ax-a+bx+b}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(a+b)+b-a}{(x+1)(x-1)} = \frac{x(a+b)+b-a}{x^2-1}$

Donc : $\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$

$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{x(a+b)+b-a}{(x+1)(x-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ b-a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 3 \\ 2b = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+1 = 3 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

Donc $\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1}$

▶2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale

$I = \int_2^3 \frac{3x-1}{x^2-1} dx = \int_2^3 \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} dx$

$= [\ln(x+1) + 2\ln(x-1)]_2^3$

$= \ln(4) + 2\ln(2) - (\ln(3) + 2\ln(1))$

$= \ln(4) + \ln(4) - (\ln(3))$

$= \ln(4 \times 4 \div 3) = \ln\left(\frac{16}{3}\right)$

Exercice 12.

On souhaite calculer $I = \int_0^1 \frac{3t-14}{t^2-t-6} dt$

▶1. Résoudre l'équation $t^2 - t - 6 = 0$ puis factoriser $t^2 - t - 6$.

$\Delta = 1 + 24 = 25$ les solutions sont donc -2 et 3

Donc $t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$

▶2. $\frac{a}{t+2}+\frac{b}{t-3}=\frac{a(t-3)}{(t+2)(t-3)}+\frac{b(t+2)}{(t-3)(t+2)}=\frac{\text{at}-3\text{a}+\text{bt}+2\text{b}}{t^2-t-6}$
$=\frac{\text{at}-3\text{a}+\text{bt}+2\text{b}}{t^2-t-6}=\frac{\text{t(a+b)}+2\text{b}-3\text{a}}{t^2-t-6}$
donc $\frac{3t-14}{t^2-t-6}=\frac{a}{t+2}+\frac{b}{t-3}\Leftrightarrow\frac{3t-14}{t^2-t-6}=\frac{\text{t(a+b)}+2\text{b}-3\text{a}}{t^2-t-6}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\-3a+2b=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\-3a+2b=-14\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\-3(3-b)+2b=-14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\-9+5b=-14\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\5b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3-b\\b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-1\end{cases}$
Donc $\frac{3t-14}{t^2-t-6}=\frac{4}{t+2}-\frac{1}{t-3}$

▶3. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.
$$I=\int_0^1\frac{3t-14}{t^2-t-6}dt=\int_0^1\frac{4}{t+2}-\frac{1}{t-3}dt$$
$=[\ln(|t+2|)-2\ln(|t-3|)]_0^1$
$=[\ln(t+2)-2\ln(3-t)]_0^1$
$=\ln(3)-2\ln(2)-(\ln(2)-2\ln(3))$
$=\ln(3)-2\ln(2)-\ln(2)+2\ln(3)$
$=3\ln(3)-3\ln(2)$
$=3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Exercice 13.

On pose $f(x)=\frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}$
▶1. Déterminer deux réels a et b tels que
$\frac{a}{2x+5}+\frac{b}{(x-1)^2}=\frac{a(x-1)^2}{(2x+5)(x-1)^2}+\frac{b(2x+5)}{(x-1)^2(2x+5)}$
$=\frac{a(x^2-2x+1)+b2x+5b}{(2x+5)(x-1)^2}=\frac{ax^2+x(2b-2a)+a+5b}{(2x+5)(x-1)^2}$
Donc $\frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}=\frac{a}{2x+5}+\frac{b}{(x-1)^2}$
$\Leftrightarrow\frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}=\frac{ax^2+x(2b-2a)+a+5b}{(2x+5)(x-1)^2}$
$\Leftrightarrow\frac{-3x^2+16x+22}{(2x+5)(x-1)^2}=\frac{ax^2+x(2b-2a)+a+5b}{(2x+5)(x-1)^2}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\16=2b-2a\\22=a+5b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\16=2b+6\\22=-3+5b\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}-3=a\\10=2b\\25=5b\end{cases}$
Donc
$f(x)=\frac{-3}{2x+5}+\frac{5}{(x-1)^2}$
▶2. sur]1,+∞[f(x) est définie et dérivable donc intégrable, on aura sur cet intervalle :
$f(x)=\frac{-3}{2}\frac{2}{2x+5}+\frac{5}{(x-1)^2}$
$F(x)=\frac{-3}{2}\ln(|2x+5|)+\frac{-5}{x-1}$ +cte

▶3.
$I=\int_2^3 f(x)dx=[\text{F(x)}]_2^3$
$=\left[\frac{-3}{2}\ln(|2x+5|)+\frac{-5}{x-1}\right]_2^3=\left[\frac{-3}{2}\ln(2x+5)+\frac{-5}{x-1}\right]_2^3$
$=\frac{-3}{2}\ln(11)+\frac{-5}{2}-\left(\frac{-3}{2}\ln(9)-5\right)$
$=\frac{-3}{2}\ln(11)+\frac{-5}{2}+\frac{3}{2}\ln(9)+5$
$=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\ln\left(\frac{9}{11}\right)$

Exercice 14.

$$f(t)=\frac{1}{(1+t)(t-2)}$$
▶1. $\frac{a}{1+t}+\frac{b}{t-2}=\frac{\text{a(t}-2)+\text{b(1+t)}}{(1+t)(t-2)}=\frac{\text{t(a+b)}+\text{b}-2\text{a}}{(1+t)(t-2)}$

Donc $f(t)=\frac{a}{1+t}+\frac{b}{t-2}\Leftrightarrow\frac{1}{(1+t)(t-2)}=\frac{\text{t(a+b)}+\text{b}-2\text{a}}{(1+t)(t-2)}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\b-2a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\b-2a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\b+2b=1\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\b+2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{3}\\b=\frac{1}{3}\end{cases}$ donc
$$f(t)=\frac{-1}{3(1+t)}+\frac{1}{3(t-2)}$$
▶2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale
$I=\int_3^5 f(t)dt=\int_3^5\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{(1+t)}+\frac{1}{(t-2)}\right)dt$
$=\frac{1}{3}[-\ln(|t+1|)+\ln(|t-2|)]_3^5$
$=\frac{1}{3}[-\ln(t+1)+\ln(t-2)]_3^5$
$=\frac{1}{3}(-\ln(6)+\ln(3))-\frac{1}{3}(-\ln(4)+\ln(1))$
$=\frac{1}{3}(-\ln(6)+\ln(3)+\ln(4))=\frac{\ln(3\times4\div6)}{3}=\frac{\ln(2)}{3}$

Exercice 15.

On souhaite calculer $I=\int_0^1\frac{2x^2+x+1}{x+3}dx$
$ax+b+\frac{c}{x+3}=\frac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3}$
$=\frac{(ax+b)(x+3)+c}{x+3}=\frac{\text{ax}^2+\text{x(b+3a)}+3\text{b}+c}{x+3}$

▶1. Ainsi $\frac{2x^2+x+1}{x+3}=ax+b+\frac{c}{x+3}$
$\Leftrightarrow\frac{2x^2+x+1}{x+3}=\frac{\text{ax}^2+\text{x(b+3a)}+3\text{b}+c}{x+3}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\1=b+3a\\1=c+3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\1=b+6\\1=c+3b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\-5=b\\1=c+3b\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\-5=b\\1=c-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=a\\-5=b\\16=c\end{cases}$

▶2. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.
$I=\int_0^1\frac{2x^2+x+1}{x+3}dx=\int_0^1 2x-5+\frac{16}{x+3}dx$
$=\left[\text{x}^2-5\text{x}+16\ln(x+3)\right]_2^3$
$=(9-10+16\ln(6))-(4-10+16\ln(5))$
$=5+16\ln\left(\frac{6}{5}\right)$

Exercice 16.

$I=\int_0^2(2-x)e^{-x}dt.$

u(x)=(2-x) u'(x)=-1
v'(x) $=e^{-x}$ v(x) $=-e^{-x}$

$I=[-(2-\mathrm{x})e^{-x}]_0^2-\int_0^2 e^{-x}dt$
$=[-(2-\mathrm{x})e^{-x}]_0^2-[-e^{-x}]_0^2$
$=[-(2-\mathrm{x})e^{-x}+e^{-x}]_0^2$
$=-(2-2)e^{-2}+e^{-2}-(-(2-0)e^{-0}+e^{-0})$
$=e^{-2}+1$

Exercice 17.

$J=\int_0^2(x-2)^2e^{-x}dx.$

u(x)=(x-2)² u'(x)=2(x-2)
v'(x) $=e^{-x}$ v(x) $=-e^{-x}$

$J=[-(x-2)^2e^{-x}]_0^2-\int_0^2-2(x-2)e^{-x}dx$
$=[-(x-2)^2e^{-x}]_0^2+2\int_0^2(x-2)e^{-x}dx$

u(x)=(x-2) u'(x)=1
v'(x) $=e^{-x}$ v(x) $=-e^{-x}$

$\mathrm{J}=[-(x-2)^2e^{-x}]_0^2+2\Big([-(x-2)e^{-x}]_0^2-$
$02-e-xdx$
$=[-(x-2)^2e^{-x}-2(x-2)e^{-x}]_0^2-2[e^{-x}]_0^2$
$=[-(x-2)^2e^{-x}-2(x-2)e^{-x}-2e^{-x}]_0^2$
$=-0^2e^{-x}-2\times 0e^{-x}-2e^{-2}-(-(-2)^2e^0-$
$2-2e-0-2e-0$
$=0-0-2e^{-2}-(-4+4-2)=2-2e^{-2}$
valeur arrondie à 10^{-2} :

Exercice 18.

$K=\int_1^e(t-e)\ln t dt.$

u(x)=ln(t) u'(t)=$\frac{1}{t}$
v'(t) $=t-e$ v(t) $=\frac{t^2}{2}-et$

$K=\left[\ln(\mathrm{t})\left(\frac{t^2}{2}-et\right)\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^e\frac{\frac{t^2}{2}-et}{t}dt$
$=\ln(\mathrm{e})\left(\frac{e^2}{2}-e^2\right)-\ln(1)\left(\frac{1^2}{2}-e\right)-$
$\int_1^e\left(\frac{t}{2}-e\right)dt=\left(\frac{e^2}{2}-e^2\right)-0-\left[\frac{t^2}{4}-et\right]_1^{\mathrm{e}}$
$=\left(-\frac{e^2}{2}\right)-0-\left(\frac{e^2}{4}-e^2-\left(\frac{1^2}{4}-e\right)\right)$
$=\left(-\frac{e^2}{2}\right)-\frac{e^2}{4}-e^2+\left(\frac{1}{4}-e\right)=\left(-\frac{7e^2}{4}\right)+\frac{1}{4}-e$

Exercice 19.

$L=\int_1^e x^2\ln x dx.$

u(x)=ln(x) u'(x)=$\frac{1}{x}$
v'(x) =x² v(x) = $\frac{x^3}{3}$

$L=\left[\frac{x^3\ln(x)}{3}\right]_1^{\mathrm{e}}-\int_1^e\frac{x^3}{3}\frac{1}{x}dx$
$=\frac{e^3\ln(e)}{3}-\frac{1^3\ln(1)}{3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}}=\frac{e^3}{3}-0-\frac{e^3}{9}+\frac{1^3}{9}$
$=\frac{2e^3+1}{9}$

Exercice 20.

$M=\int_1^3(2+x)e^{-x}dx.$

u(x)=(2+x) u'(x)=1
v'(x) $=e^{-x}$ v(x) $=-e^{-x}$

$M=[-(2+\mathrm{x})e^{-x}]_1^3-\int_1^3-e^{-x}dx$
$=[-(2+\mathrm{x})e^{-x}]_1^3-[e^{-x}]_1^3$
$=-(5)e^{-3}+(3)e^{-1}-e^{-3}+e^{-1}$
$=-6e^{-3}+4e^{-1}$

Exercice 21.

Soit f la fonction définie sur]–2,2[par $f(x)=\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

►1. $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{2+x}{2-x}\geq 1 \Leftrightarrow$ $2+x\geq 2-x$ (vu le domaine de définition) $\Leftrightarrow x\geq 0$ donc sur [0 ;1] on aura $f(x)\geq 0$ donc $I=\int_0^1 f(x)dx\geq 0.$

►2. $f'(\mathrm{x})=\frac{1(2-x)-(2+x)(-1)}{(2-x)^2}\frac{1}{\frac{2+x}{2-x}}=\frac{4}{(2-x)^2}\frac{2-x}{2+x}=$ $\frac{4}{(2-x)(2+x)}=\frac{4}{4-x^2}$

$\int_0^1 1f(x)dx=[\mathrm{x}f(\mathrm{x})]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$
$=\left[\mathrm{x}\ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1 x\frac{4}{4-x^2}dx$
$=\ln(3)-0\ln(1)-\int_0^1\frac{4\mathrm{x}}{4-x^2}dx$
$=\ln 3-\int_0^1\frac{4x}{4-x^2}dx$ CQFD
$=\ln 3-\int_0^1-2\frac{-2x}{4-x^2}dx$
$=\ln 3-[-2\ln(4-x^2)]_0^1$
$=\ln 3+2\ln(3)-2\ln(4)=\ln\frac{27}{16}$

Exercice 22.

Soit f et g les fonctions définies sur [0,1] par $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$ et $g(x)=\ln(4-x^2)$.

►1. Montrer que pour tout x de [0,1] $f(x)=-1+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}$.

$-1+\frac{1}{(2-x)}+\frac{1}{(2+x)}$
$=\frac{-1(2-x)(2+x)}{(2-x)(2+x)}+\frac{(2+x)}{(2-x)(2+x)}+\frac{(2-x)}{(2+x)(2-x)}$
$=\frac{-4+\mathrm{x}^2+2+\mathrm{x}+2-\mathrm{x}}{(2-x)(2+x)}=\frac{\mathrm{x}^2}{(2-x)(2+x)}$
$=\frac{\mathrm{x}^2}{4-\mathrm{x}^2}=\mathrm{f(x)}$

▶2. $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}dx$
$= [-x - \ln(2-x) + \ln(2+x)]_0^1$
$= -1 - \ln(1) + \ln(3) - (-0 - \ln(2) + \ln(2))$
$= \ln(3) - 1$

▶3. Montrer que $J = \int_0^1 g(x)dx = \ln 3 + 2I$. En déduire la valeur exacte de J.
$g'(x) = (-2x)\frac{1}{4-x^2} = \frac{-2x}{4-x^2}$
$J = \int_0^1 1g(x)dx = [xg(x)]_0^1 - \int_0^1 x\, g'(x)dx$
$= [x\ln(4-x^2)]_0^1 - \int_0^1 x\ \frac{-2x}{4-x^2}dx$
$= \ln(3) - 0\ln(4) + 2\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}dx$
$= \ln(3) + 2\int_0^1 f(x)dx = \ln(3) + 2I$
$= \ln(3) + 2(\ln(3) - 1) = 3\ln(3) - 2$

Exercice 23.
▶1. Dériver $f(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}}$ sur $]-0{,}5;-\infty[$.
$$f'(x) = \frac{3}{2}2(2x+1)^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{2x+1}$$
▶2. $\int_0^1 \sqrt{2x+1}dx = \int_0^1 \frac{1}{3}f'(x)dx = \left[\frac{1}{3}f(x)\right]_0^1$
$= \frac{1}{3}f(1) - \frac{1}{3}f(0) = \frac{1}{3}(3)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} - \frac{1}{3}$.
▶3. Calculer $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}dx$.
$\frac{x+3}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x+6}{\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{2}\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}} + \frac{1}{2}\frac{5}{\sqrt{2x+1}}$
$= \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
Je pose $g(x) = \sqrt{2x+1}$ et donc
$g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$
$\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{2x+1}}dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{2x+1}}\right)dx$
$= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\frac{1}{3}f'(x) + \frac{5}{2}g'(x)\right)dx = \left[\frac{1}{6}f(x) + \frac{5}{2}g(x)\right]_0^1$
$= \frac{1}{6}f(1) + \frac{5}{2}g(1) - \left(\frac{1}{6}f(0) + \frac{5}{2}g(0)\right)$
$= \frac{1}{6}3^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{6}(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}1\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{2}\right)$
$= 3\sqrt{3} - \frac{16}{6}$

Exercice 24.
▶1. $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{Arctan}(x)]_0^1 = \mathrm{Arctan}(1) - \mathrm{Arctan}(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$.
▶2. $J = \int_0^1 \frac{1}{1+4t^2}dt$. Je pose u = 2t et donc du = 2dt et $t = \frac{1}{2}u$ $J = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{2} = \left[\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(x)\right]_0^{\frac{1}{2}} =$
$\frac{1}{2}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Arctan}(0) = \frac{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)}{2}$
En donner une valeur arrondie à 10^{-2}.

▶3. A l'aide du changement de variable $x = t+2$, déterminer l'intégrale $K = \int_0^1 \frac{1}{5+4t+t^2}dt$.
$5 + 4t + t^2 = 0$
$\Delta = 16 - 20 = -4$ donc pas de solution réelles
$x = t+2$, x-2=t , dx = dt

$K = \int_0^1 \frac{1}{5+4t+t^2}dt = \int_2^3 \frac{1}{5+4(x-2)+(x-2)^2}dx$
$= \int_2^3 \frac{1}{x^2+1}dx = [\mathrm{Arctan}(x)]_2^3$
$= \mathrm{Arctan}(3) - \mathrm{Arctan}(2)$

Exercice 25.
Avec $x = t - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2} = t$ et $dx = \mathrm{d}t$
$I = \int_0^1 \frac{dx}{\frac{5}{4}+x+x^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\frac{5}{4}+\left(t-\frac{1}{2}\right)+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t^2+1}$.
$= [\mathrm{Arctan}(x)]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) - \mathrm{Arctan}\left(-\frac{1}{2}\right)$
$= \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)$
En donner une valeur arrondie à 10^{-3}.

Exercice 26.
$t = \frac{1}{\sqrt{3}}(2x+1)$, donc $t\sqrt{3} = 2x + 1$ donc
$\frac{t\sqrt{3}-1}{2} = x$ et de plus $dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{d}x$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2}dt = \mathrm{d}x$
$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\left(\frac{t\sqrt{3}-1}{2}\right)^2+\left(\frac{t\sqrt{3}-1}{2}\right)+1}$.
$= \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dt}{\frac{3t^2}{4}+\frac{3}{4}} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\frac{3}{4}}\frac{dt}{t^2+1} = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{dt}{t^2+1}$
$= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}(x)\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}$
$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

En donner une valeur arrondie à 10^{-3}.

Exercice 27.
Soit la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = (x-1)e^{2x}$. On appelle c la courbe de f tracée dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
▶1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?
$\lim_{x\to+\infty}(x-1) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$
Donc $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{f}(x) = +\infty$
La limite en $-\infty$ est triviale si on admet que $\lim_{x\to-\infty} P(x)e^x = 0$ pour tout polynome P(x)
Démonstration :
On pose y=-x ainsi $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{f}(x) = \lim_{y\to+\infty}(-y-1)e^{-2y}$

$= \lim\limits_{y \to +\infty} \left(\frac{-y}{e^{2y}} - \frac{1}{e^{2y}} \right) = 0$

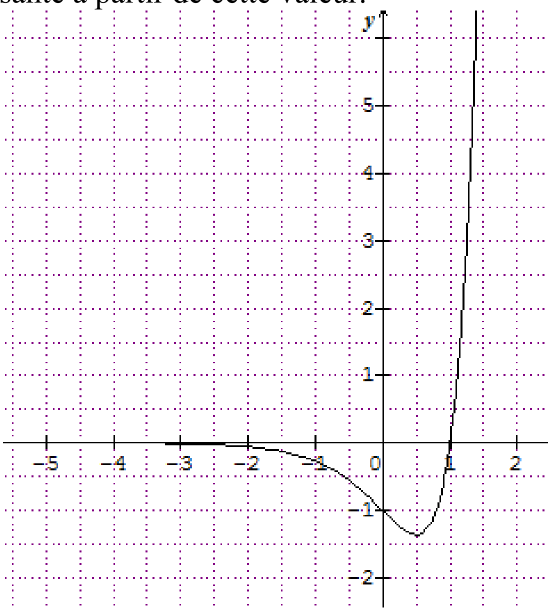
Il y aura donc une asymptote horizontale d'équation y = 0 en $-\infty$

▶2. Etudier les variations de *f* et tracer sa courbe c.

$f'(x) = e^{2x} + (x-1)2e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$

Donc f' est du signe de 2x – 1

Donc f est décroissante jusqu'à 0,5 puis croissante à partir de cette valeur.



▶3. l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations *x* = 0 et *x* = 1, la courbe c et l'axe des abscisses est $A = -\int_0^1 \mathrm{f(x)}\, dx\ U.A.$ car la courbe est sous l'axe des abscisses sur [0 ;1]

$\int_0^1 \mathrm{f(x)}\, dx = \int_0^1 (x-1)e^{2x}\, dx$

On pose u(x) = x-1 et v'(x) = e^{2x} d'une part et u'(x) = 1 et v (x) = $\frac{1}{2}e^{2x}$, ainsi :

$\int_0^1 \mathrm{f(x)}\, dx = \left[(x-1)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\, dx$

$= \left[(x-1)\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$

$= 0\frac{1}{2}e^2 - (-1)\frac{1}{2}e^0 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}e^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^2$

L'aire sera donc $-\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}e^2\right)$ u. a. = $\frac{e^2-3}{4}$ u.a.

Exercice 28.

Soit la fonction *f* définie sur ℝ par :

$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}$. On désigne par c sa courbe dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

▶1. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Que peut-on en déduire ?

$$\lim_{x \to +\infty} f(x)$$

$f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x} = \frac{1}{2}(x^2+2x+1)e^{-2x}$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{e^{2x}} + \frac{2x}{e^{2x}} + \frac{1}{e^{2x}}\right) \xrightarrow{x \to +\infty} 0$

$\frac{1}{2}(x+1)^2 \xrightarrow{x \to -\infty} +\infty$ et $e^{-2x} \xrightarrow{x \to -\infty} +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

▶2. $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}$ donc

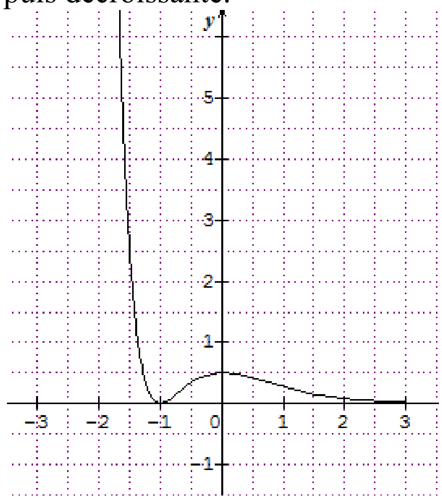
$f'(x) = \frac{1}{2}2(x+1)e^{-2x} + \frac{1}{2}(x+1)^2(-2)e^{-2x}$

$= (x+1)e^{-2x} - (x+1)^2e^{-2x}$

$= (x+1)e^{-2x}\big(1 - (\mathrm{x}+1)\big)$

$= -\mathrm{x}(x+1)e^{-2x}$

Décroissante jusqu'à -1, croissante jusqu'à 0 puis décroissante.



▶3 l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations *x* = –1 et *x* = 0, la courbe c et l'axe des abscisses sera $A = \int_{-1}^0 \mathrm{f(x)}\, dx\ U.A.$

$\int_{-1}^0 \mathrm{f(x)}\, dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\, dx$

On pose u(x) = $\frac{1}{2}(x+1)^2$ et v'(x) = e^{-2x} d'une part et u'(x) = $x+1$ et v (x) = $\frac{1}{-2}e^{-2x}$ d'autre part

Ainsi : A=$\int_{-1}^0 \frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (\mathrm{x}+1)\frac{1}{-2}e^{-2x}\, dx$

$= \frac{1}{2}1\frac{1}{-2}e^0 - \frac{1}{2}0^2\frac{1}{-2}e^2 + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (\mathrm{x}+1)e^{-2x}\, dx$

$= \frac{1}{-4} - 0 + \frac{1}{2}\int_{-1}^0 (\mathrm{x}+1)e^{-2x}\, dx$

On pose : u(x) = (x + 1) et v'(x) = e^{-2x} d'une part et u'(x) = 1 et v (x) = $\frac{1}{-2}e^{-2x}$ d'autre part

A= $\frac{1}{-4} + \frac{1}{2}\left(\left[(\mathrm{x}+1)\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{1}{-2}e^{-2x}\, dx\right)$

$= \frac{1}{-4} + \frac{1}{2}\left(1\frac{1}{-2}e^0 - 0\frac{1}{-2}e^{+2} - \left[\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^0\right)$

$= \frac{1}{-4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2} - 0 - \frac{1}{4}e^0 + \frac{1}{4}e^2\right)$

$= \frac{1}{-4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{-2} - 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^2\right)$

$= \frac{5}{-8} + \frac{1}{8}e^2$

Donc l'aire sera $\frac{\mathrm{e}^2-5}{8}$u.a.