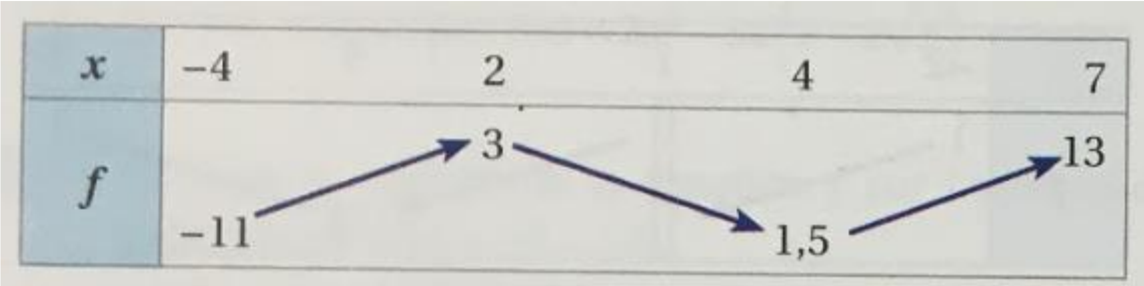
**Exercice 51P82**




Compter le nombre de solution est facile, la rédaction sera elle, un peu plus compliquée

a) $f(x) = -8$

On décompose notre étude suivant les intervalles sur lesquels la fonction est monotone (ça permet d'utiliser le corollaire du TVI et la méthode pour montrer qu'un intervalle ne contient pas de solution pour une équation de type $f(x) = k$

Sur $[-4; 2]$

- $f(-4) = -11$ et $f(2) = 3$ donc on a $f(-4) < -8 < f(2)$
- D'après le tableau $f$ est continue sur $[-4; 2]$
- D'après le tableau $f$ est strictement croissante sur $[-4; 2]$

Donc d'après le corollaire du TVI, $f(x) = -8$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-4; 2]$

Sur $[2; 4]$

D'après le tableau de variation $f$ est décroissante sur cet intervalle et a pour plus petite valeur sur cet intervalle : $f(4) = 1{,}5$ ce qui veut dire que quel que soit le $x$ sur $[2; 4]$ $f(x) > -8$ donc l'équation $f(x) = -8$ n'a pas de solution sur cet intervalle

Sur $[4; 7]$

D'après le tableau de variation $f$ est croissante sur cet intervalle et a pour plus petite valeur sur cet intervalle : $f(4) = 1{,}5$ ce qui veut dire que quel que soit le $x$ sur $[4; 7]$ $f(x) > -8$ donc l'équation $f(x) = -8$ n'a pas de solution sur cet intervalle

Conclusion $f(x) = -8$ a une unique solution sur $[-4; 7]$

Remarque :

les deux intervalles $[2; 4]$ et $[4; 7]$ pouvaient être traités ensemble de la manière suivante :

Sur $[2; 7]$

D'après le tableau de variation $f$ a pour plus petite valeur sur cet intervalle : $f(4) = 1{,}5$ ce qui veut dire que quel que soit le $x$ sur $[2; 7]$ $f(x) > -8$ donc l'équation $f(x) = -8$ n'a pas de solution sur cet intervalle

b)

Sur $[-4; 2]$

- $f(-4) = -11$ et $f(2) = 3$ donc on a $f(-4) < 2 < f(2)$
- D'après le tableau $f$ est continue sur $[-4; 3]$
- D'après le tableau $f$ est strictement croissante sur $[-4; 3]$

Donc d'après le corollaire du TVI, $f(x) = 2$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-4; 3]$

Sur $[2; 4]$ et $[4; 7]$ on a exactement le même raisonnement, c'est long, peu intéressant, et on a déjà fait nos preuves sur l'intervalle $[-4; 2]$ donc on écourte et on écrit :

De la même manière $f(x) = 2$ a une unique solution sur $[2; 4]$ et une sur $[4; 7]$.

c)
d'après le tableau de variation la valeur la plus élevée que peut prendre $f$ sur $[-4; 7]$ est 13 , ce qui veut dire que sur l'intervalle $f(x) \leq 13$ et donc $f(x) = 15$ n'est pas possible sur l'intervalle.

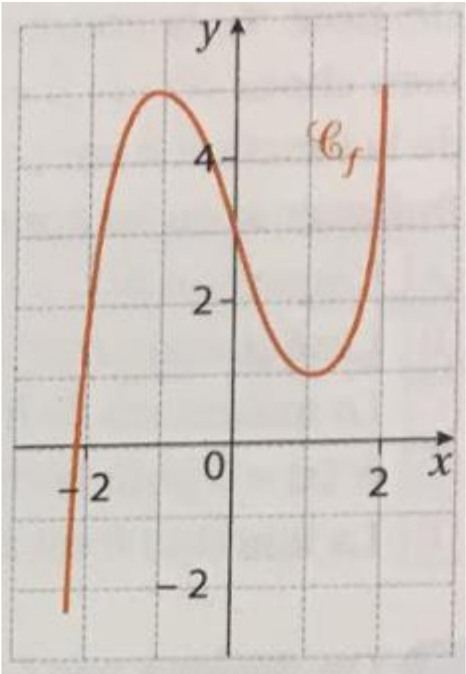
Exercice 52

| $x$ | $-6$ | | $0$ | | $2$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | $-4$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $5$ |

Exercice 55P82
Pour cet exercice on ne sait rien des variations, donc on ne pourra pas utiliser le corollaire du TVI, on ne peut utiliser que le TVI lui-même.
Sur $[-3; 2]$ , $f$ est continue
(si elle l'est sur $[-6; 7]$ elle le sera dans l'intervalle intérieur $[-3; 2]$)
Et $f(-3) = -4 < 0 < f(2) = 1$
Donc d'après le TVI $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[-3; 2]$

Sur $[2; 5]$ , $f$ est continue
(si elle l'est sur $[-6; 7]$ elle le sera dans l'intervalle intérieur $[2; 5]$)
Et $f(5) = -2 < 0 < f(2) = 1$
Donc d'après le TVI $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[2; 5]$
On a déjà au moins une solution dans le premier intervalle et au moins une autre solution (différente de la première) dans l'autre intervalle.
On a donc au moins deux solutions sur $[-6; 7]$ qui contient les deux intervalle précédemment étudiés.

Exercice 56P82




1.a. par lecture graphique
la courbe n'est coupée qu'une seule fois par l'axe des abscisses (autrement dit la droite d'équation $y = 0$)
Sur le dessin $\alpha \approx -2{,}2$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 3$

avec un balayage au dixième on obtient :

| X | Y1 |
|---|---|
| -3 | -15 |
| -2.9 | -12.69 |
| -2.8 | -10.55 |
| -2.7 | -8.583 |
| -2.6 | -6.776 |
| -2.5 | -5.125 |
| -2.4 | -3.624 |
| -2.3 | -2.267 |
| -2.2 | -1.048 |
| -2.1 | 0.039 |
| -2 | 1 |

donc $-2{,}2 < \alpha < -2{,}1$

avec un balayage au centième on obtient :

| X | Y1 |
|---|---|
| -2.12 | -0.168 |
| -2.11 | -0.064 |
| -2.1 | 0.039 |
| -2.09 | 0.1407 |

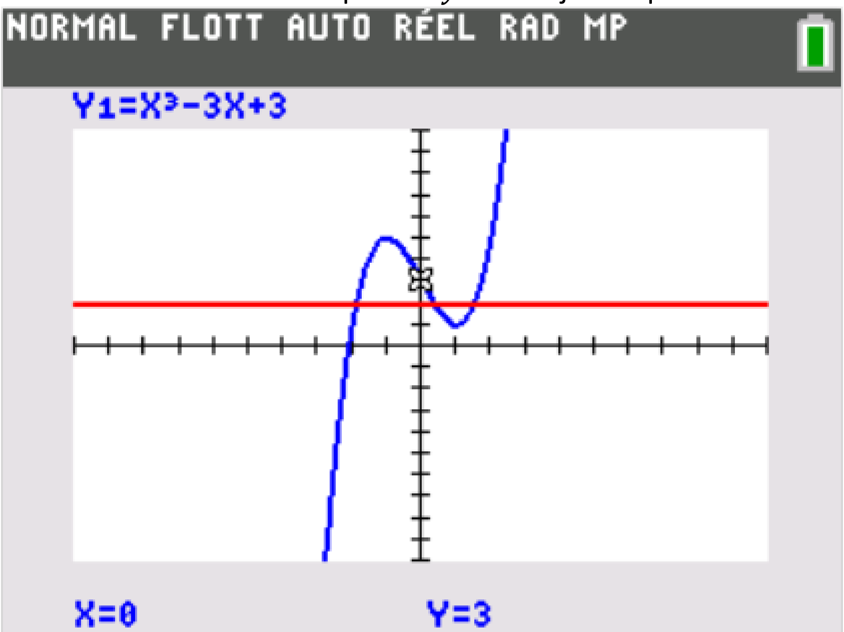
Et donc $-2{,}11 < \alpha < -2{,}1$

Après un balayage au millième on obtient :

| X | Y1 |
|---|---|
| -2.105 | -0.012 |
| -2.104 | -0.002 |
| -2.103 | 0.0083 |
| -2.102 | 0.0185 |

Donc $-2{,}104 < \alpha < -2{,}103$

2.
Pour trouver graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = 2$
Je dois regarder combien de points de la courbe on exactement la hauteur 2
Je trace donc la droite d'équation $y = 2$ et je compte le nombre de points d'intersection.




On en a visiblement 3

La première sera notée $x_1$ et vérifie $-1{,}88 < x_1 < -1{,}879$
La seconde sera notée $x_2$ et vérifie $0{,}347 < x_2 < 0{,}348$
La troisième sera notée $x_3$ et vérifie $1{,}532 < x_3 < 1{,}533$

Bonus :

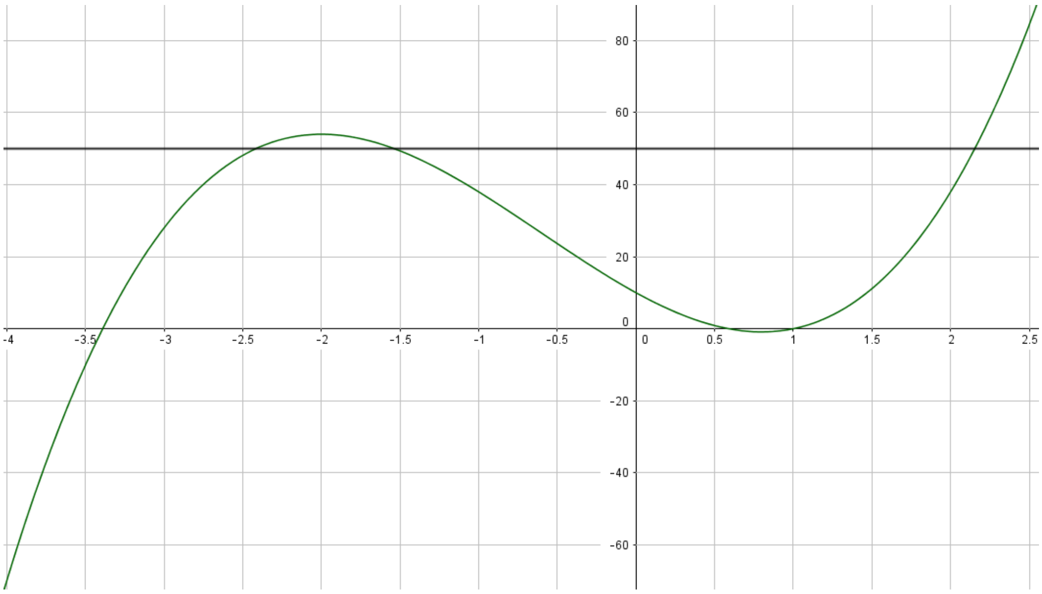
## **Fiche d'entrainement :** corollaire du TVI

Soit $f$ la fonction définie sur $[-4; 2{,}5]$ par $f(x) = 5x^3 + 9x^2 - 24x + 10$
Le but de l'exercice et de trouver une approximation des antécédents de 50 par la fonction $f$

**Partie 1 : Approche graphique**
Tracer la courbe représentative de la fonction $f$ sur votre calculatrice dans la fenêtre suivante :
$Xmin = -4$, $X_{max} = 2{,}5$, $Y_{min} = -70$ et $Y_{\max} = 90$
Tracer la droite d'équation $y = 50$
1) Observer les points d'intersections entre la courbe et la droite, et conjecturer le nombre d'antécédent de 50 par $f$
2) Donner une approximation de ces antécédents par lecture graphique.

**Partie 2 : approche algébrique**
1) Donner la dérivée de la fonction $f$
2) En déduire les variations de $f$ (on attend un tableau complet avec les valeurs au bout des flèches.
3) Prouver la conjecture faite à la question 1 de la partie 1
4) Donner **un encadrement à $10^{-3}$** de la plus petite des racines, et à $10^{-2}$ pour les autres.

Correction




Partie 1
1) On a l'impression que 50 a trois antécédents parla fonction $f$
2) On a l'impression que ces antécédents valent approximativement : -2,4 ; -1,5 et 2,1

Partie 2
1) $f'(x) = 15x^2 + 18x - 24$
2) Etude du signe de $f'(x)$ : $\Delta = 18^2 - 4 \times 15(-24) = 1764$ , ici $\Delta > 0$ donc la dérivée aura

| x | -4 | | -2 | | 0,8 | | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | + | 0 | - | 0 | + | |
| f(x) | | $\nearrow$ | 54 | $\searrow$ | | $\nearrow$ | 84,375 |
| | -70 | | | | -0,88 | | |

deux racines : $x_1 = \frac{-18-\sqrt{1764}}{2\times15} = -2$ et $x_2 = \frac{-18+\sqrt{1764}}{2\times15} = 0{,}8$

3) . $f$ est continue et strictment croissante sur [- 4;-2], de plus $f(-4) < 50 < f(-2)$ donc d'après le corollaire du TVI 50 a exactement un antécédent sur $[-4;-2]$ par la fonction $f$

$f$ est continue et strictement décroissante sur [-2 ;0,8], de plus $f(-2) > 50 > f(-0{,}8)$ donc d'après le corollaire du TVI 50 a exactement un antécédent sur [-2 ;0,8] par la fonction $f$

$f$ est continue et strictment croissante sur [0,8 ;2,5], de plus $f(0{,}8) < 50 < f(2{,}5)$ donc d'après le corollaire du TVI 50 a exactement un antécédent sur [0,8 ;2,5] par la fonction $f$

Ainsi 50 a exactement 3 antécédents sur $[-4; 2{,}5]$

4) $f(-2{,}5) < 50 < f(-2{,}4)$ donc $[-2{,}5; -2{,}4\,]$ est un bon encadrement à $10^{-1}$ de la même manière

$[-2{,}42; -2{,}41]$ en est un à $10^{-2}$ et $[-2{,}417; -2{,}416]$

De la même manière $[-1{,}54; -1{,}53]$ est un encadrement de la seconde et $[2{,}15; 2{,}16]$ en est un de la dernière.