Chap 0 – Retour sur les dérivées

Dans tout ce chapitre, f sera une fonction définie sur I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $h > 0$ tel que $a + h \in I$, et C_f est la courbe représentative de f.

I. Rappels : comment déterminer la fonction dérivée

Dérivées des fonctions usuelles et opérations sur les dérivées:

intervalle de validité	fonction	dérivée
	k	
	$ax + b$	
	x^n, avec $n \in \mathbb{N}^*$	
	$\frac{1}{x}$	
	$\frac{1}{x^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	
	$\sqrt{x}$	

validité	opération	dérivée
u et v dérivables	$u + v$	
u dérivable	$k \times u, k \in \mathbb{R}$	
u et v dérivables	$u \times v$	
v dérivable et $v(x) \neq 0$	$\frac{1}{v}$	
u et v dérivables et $v(x) \neq 0$	$\frac{u}{v}$	

Exemple : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f(x) = (3x^2 - 5)\left(\frac{2}{x^2} + 5\right)$ On utilise la formule : .... avec :

$u(x) =$ .... $v(x) =$ .... $u'(x) =$.............................. et $v'(x) =$ ....

Donc $h'(x) =$ ....

$g(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}}$.

On utilise la formule : .... avec :

$v(x) =$ .... et $v'(x) =$ ....

Donc $g'(x) =$ ....

$h(x) = \frac{2x^3}{5} - \frac{5x^2}{x+1}$ On utilise la formule : .... Pour le deuxième quotient, avec :

$u(x) =$ .... $v(x) =$ .... $u'(x) =$.............................. et $v'(x) =$ ....

Donc $h'(x) =$ ....

II. Rappel : comment exploiter la fonction dérivée

1. Tangente à la courbe représentative d'une fonction :

Théorème:
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant un réel a.
La tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple : Donner l'équation de la tangente à la courbe de la fonction f définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 3)^3$ au point d'abscisse 1

Remarque :
Si on veut tracer la tangente en un point de la courbe d'abscisse a en faisant le moins de calculs possible, on commence par placer le point de contact sur la courbe, puis après avoir calculer $f'(a)$ on placera un autre point en se déplaçant d'une unité vers la droite et de $f'(a)$ unités vers le haut.

2. Sens de variation d'une fonction :

Théorème 5 (admis) : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
- **Si** pour tout$x \in I$, $f\,'(x)$ est strictement positive (ou nulle en quelques points isolés) **alors** la fonction f est strictement croissante sur I.
- **Si** pour tout $x \in I$, $f\,'(x)$ est strictement négative (ou nulle en quelques points isolés) **alors** la fonction f est strictement décroissante sur I.
- **Si** pour tout $x \in I$, $f\,'(x) = 0$ **alors** la fonction f est constante sur I.

Exemple : Sens de variation de $f(x) = (2x - 3)^3$ sur $\mathbb{R}$?

3. Extremums :

Propriété 6: Soit f une fonction dérivable sur $]a; b[$ et $x_0 \in]a\,;\, b[$. Si $f\,'$ s'annule **et change de signe** en x_0, alors f admet une extremum local en x_0.

Remarque : Le signe de la dérivée permet de dire s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.
Exemple : Etudier les extrema locaux de $f(x) = (2x - 3)^3$ sur $\mathbb{R}$.