Etude du signe d'une expression

Dans le cadre des études de variations de fonctions on sera amené à dériver celle-ci, puis à étudier le signe de leurs dérivées. Par exemple pour déterminer les variations de la fonction $(x)=\frac{x^2-5}{2x+3}$, je la dérive et j'obtiens $f'(x)=\frac{6x^2+6x-10}{(2x+3)^2}$. Pour étudier le signe de ce quotient je dois maitriser simultanément le signe du numérateur et du dénominateur, et en utilisant la règle de signe je vais pouvoir en déduire le signe de l'ensemble.

Pour m'en sortir il me faut bien des compétences dont : déterminer le signe des fonctions affine et trinôme, combiner les signes de plusieurs expression au travers d'un tableau de signe.

Etude du signe d'une fonction affine : $\boldsymbol{ax+b}$

Etudier le signe d'une expression revient à comparer celle-ci avec zéro.
Pour savoir où mettre les « + » dans le tableau de signe, il faut que je sache quand est-ce-que l'expression est supérieure ou égale à zéro.
Exemple / Méthode : Signe de $7x-4$?

$7x-4\geq 0$ on mettre des plus quand …
⇔ $7x-4+4\geq 0+4$ on regroupe les x d'un côté et les sans x de l'autre
⇔ $7x\geq 4$
⇔ $\frac{7x}{7}\geq\frac{4}{7}$ on divise par le coefficient de x à gauche et à droite
⇔ $x\geq\frac{4}{7}$ Attention : diviser ou multiplier par un nombre négatif
$S=[\frac{4}{7};+\infty[$ change l'ordre.

donc après $\frac{4}{7}$ l'expression est positive, et donc avant elle est négative et en $\frac{4}{7}$ l'expression est nulle.
Autre formulation :

x	$-\infty$		$4/7$		$+\infty$
$7x-4$		$-$	0	$+$	

Etude du signe d'une fonction trinôme : $\boldsymbol{ax^2+bx+c}$

Appuyez-vous sur un support graphique ça vous facilitera la vie !
Si le signe de a nous permettra de connaitre l'orientation de la parabole représentant la fonction (∪ si $a>0$ et ∩ si $a<0$) , on doit déterminer Δ= b^2-4ac pour savoir si la parabole rencontre l'axe des abscisses ⇔ la fonction s'annule)
Exemple / Méthode : Signe de $-x^2+5x+6$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4(-1)6$ recherche du déterminant
$=25+24=49>0$ il est positif donc on aura deux racines :
$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ Comme <0 , la parabole ressemble à un ∩
$=\frac{-5-\sqrt{49}}{-2}=6$ $=\frac{-5+\sqrt{49}}{-2}=-1$ on sera donc positif entre les racines : $[-1;6]$
et négatif à l'extérieur : $]-\infty;-1]\cup[6;+\infty[$

Autre formulation :

x	$-\infty$		-1		6		$+\infty$
$-x^2+5x+6$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Remarque : si la question posée était : résoudre $-x^2+5x+6\leq 0$ je devrai chercher dans le tableau les colonnes où le trinôme est négatif, et faire attention aux bornes. Ici l'inégalité est large donc je dois prendre les valeurs d'annulation, ainsi : $S=]-\infty;-1]\cup[6;+\infty[$

Etude du signe d'un produit ou d'un quotient
Comme la règle des signes est la même pour les produits et les divisions, pour connaitre le signe de l'expression, il nous suffit de connaitre le signe de chacun des facteurs puis de faire la synthèse.
Méthode : signe de $\frac{-x^2+5x+6}{7x-4}$
La première chose à faire est d'étudier séparément les signes de chacun des facteurs (ce qui a été fait dans les exemples précédents)
Puis on fait un tableau de synthèse : sur la première ligne dédiées aux x on indique chacune des valeurs d'annulation puis on met chaque facteur sur une ligne, et sur la dernière l'expression complète.
Ce qui va nous donner ici :

x	$-\infty$		-1		$4/7$		6		$+\infty$
$-x^2+5x+6$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$7x-4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-x^2+5x+6}{7x-4}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Pour la ligne de synthèse, dans les cases on met des plus ou des moins en respectant la règle des signes, sur les traits verticaux on mettra des 0 ou des ||, pour savoir ce qu'il faut mettre, il suffit de regarder plus haut et de se demander : ce 0 que je vois, il est au numérateur (dans ce cas on met un 0 sur la ligne de synthèse) ou est ce qu'il est au dénominateur (on mettra alors une double barre).

Exemple de synthèse :
Etudions le signe de $f'(x) = \frac{6x^2+6x-10}{(2x+3)^2}$
Commençons par l'étude du numérateur :
$\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 6 \times (-10) = 36 + 240 = 276$
$\Delta > 0$ donc le trinôme a deux racines :
$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6-\sqrt{276}}{12} \approx -1{,}88$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6+\sqrt{276}}{12} \approx 0{,}88$
Comme $a > 0$, la parabole ressemble à un U et donc le trinôme sera négatif entre les racines

Etude du signe de $(2x+3)$
$2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -3 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{2}$
Attention au numérateur on a $(2x+3)^2$, autrement le carré de $(2x+3)$cette expression sera positive sauf en $-\frac{3}{2}$ où elle sera nulle

Passons à la synthèse
On remarque que $x_1 < -\frac{3}{2} < x_2$

x	$-\infty$		x_1		$-3/2$		x_2		$+\infty$
$6x^2+6x-10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+3)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{6x^2+6x-10}{(2x+3)^2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$

b) $17+4x$

c) $4x^2-7x+13$

d) $-3x^2+42x-147$

e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$

f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$

g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Correction

a) $5-3x \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -3x \geq -5 \Leftrightarrow \frac{-3x}{-3} \leq \frac{-5}{-3} \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{3}$

La division par le nombre négatif -3 a changé l'ordre

x	$-\infty$		$5/3$		$+\infty$
$5-3x$		$+$	0	$-$	

b) $17+4x \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq -17 \Leftrightarrow x \geq -\frac{17}{4}$

x	$-\infty$		$-17/4$		$+\infty$
$17+4x$		$-$	0	$+$	

c) $4x^2-7x+13$

$\Delta = b^2-4ac = (-7)^2-4\times 4\times 13 = -159$ $\Delta < 0$ donc l'expression n'a pas de racine, de plus $a>0$ donc on a une parabole en forme de U qui « flotte » au-dessus de l'axe des abscisse, l'expression est toujours positive.

x	$-\infty$		$+\infty$
$4x^2-7x+13$		$+$	

d) $-3x^2+42x-147$

$\Delta = b^2-4ac = 42^2-4(-3)(-147) = 0$,

donc l'expression n'a qu'une racine : $x_0 = -\frac{b}{2a} = 7$.

L'expression est négative tout le temps sauf en 7 où elle est nulle.

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$-3x^2+42x-147$		$-$	0	$-$	

e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$

$3x-5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

$7x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{7}$

$11-5x \geq 0$

$\Leftrightarrow -5x \geq -11 \Leftrightarrow x \leq \frac{-11}{-5}$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$11-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-5)(7x+3)(11-5x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$

$4x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{4}$

$2x-8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$

$x \geq 0$ (rien à ajouter)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		4		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-8$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

$2-3x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$ donc $(2-3x)^2$ sera positif tout le temps sauf en $\frac{2}{3}$

Signe de x^2-16

$\Delta = b^2-4ac$

$= 0^2-4\times 1\times(-16) = 64 > 0$ on aura donc deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -4$ et $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 4$

$a>0$ donc on sera positif à l'extérieur des bornes

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
x^2-16		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2-3x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

Exercices d'application

Déterminer le signe des expressions suivantes :

a) $5-3x$
b) $17+4x$
c) $4x^2-7x+13$
d) $-3x^2+42x-147$
e) $(3x-5)(7x+3)(11-5x)$
f) $\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$
g) $\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$-3x^2+42x-147$		$-$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{3}{7}$		$\frac{5}{3}$		$\frac{11}{5}$		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x+3$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$11-5x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(3x-5)\,(7x+3)\,(11-5x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		0		4		$+\infty$
$4x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$2x-8$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{(4x+1)(2x-8)}{x}$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-4		$\frac{2}{3}$		4		$+\infty$
x^2-16		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2-3x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-16}{(2-3x)^2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	