Exercice 7P113

$C = \frac{1,1^{x-0,5}+1,1^{x+0,5}}{2,2} = \frac{1,1^{x}1,1^{-0,5}+1,1^{x}1,1^{0,5}}{2,2} = \frac{1,1^{x}\left(1,1^{-0,5}+1,1^{0,5}\right)}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x}\left(\frac{1}{1,1^{0,5}}+1,1^{0,5}\right)}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1,1}}+\sqrt{1,1}\right)}{1,1\times 2}$

$= \frac{1,1^{x}\left(\frac{\sqrt{1,1}}{\sqrt{1,1}\sqrt{1,1}}+\sqrt{1,1}\right)}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x}\left(\frac{\sqrt{1,1}}{1,1}+\sqrt{1,1}\right)}{1,1\times 2}$

$= \frac{1,1^{x}\sqrt{1,1}\left(\frac{1}{1,1}+1\right)}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x}\sqrt{1,1}\left(\frac{1}{1,1}+\frac{1,1}{1,1}\right)}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x}\sqrt{1,1}\left(\frac{2,1}{1,1}\right)}{1,1\times 2}$

$= \frac{1,1^{x}\sqrt{1,1}\times 2,1\times 1,1^{-1}}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x}\sqrt{1,1}\times 2,1\times 1,1^{-1}\times 1,1^{-1}}{2}$

$= \frac{1,1^{x-1-1}\times 1,1^{0,5}\times 2,1}{2} = \frac{2,1}{2}1,1^{x-2+0,5}$

$= 1,05 \times 1,1^{x-1,5}$

Version pro (rapide efficace … mais faut y penser !)

$C = \frac{1,1^{x-0,5}+1,1^{x+0,5}}{2,2} = \frac{1,1^{x-0,5}+1,1^{x-0,5+1}}{2,2}$

$= \frac{1,1^{x-0,5}\times 1+1,1^{x-0,5}1,1^{1}}{2,2} = \frac{1,1^{x-0,5}(1+1,1^{1})}{2,2} = \frac{1,1^{x-0,5}2,1}{1,1\times 2} = \frac{1,1^{x-0,5}2,1\times 1,1^{-1}}{2} = \frac{1,1^{x-0,5+(-1)}2,1}{2}$

$= 1,1^{x-1,5}\frac{2,1}{2} = 1,1^{x-1,5}\times 1,05$

$D = \frac{7^{x+2}+7^{x}}{5} = \frac{7^{x}7^{2}+7^{x}\times 1}{5} = \frac{7^{x}(7^{2}+1)}{5} = \frac{7^{x}50}{5} = 7^{x}\frac{50}{5} = 10\times 7^{x}$

21P114

$A = e^{2,5}\times e^{-0,5}\times 3 = e^{2,5+(-0,5)}\times 3 = 3e^{2}$

$B = e^{1,5}\times (e^{-0,5})^{3} = e^{1,5}\times e^{-1,5} = e^{1,5+(-1,5)} = e^{0} = 1$

$C = (1+e^{0,5})(1-e^{-0,5})$
$= 1-e^{-0,5}+e^{0,5}+e^{0,5}(-e^{-0,5})$
$= 1-e^{-0,5}+e^{0,5}-e^{0,5}e^{-0,5}$
$= 1-e^{-0,5}+e^{0,5}-e^{0} = -e^{-0,5}+e^{0,5}$

$D = (1+e^{0,5})^{2}+(1-e^{-0,5})^{2}$
$= 1+2e^{0,5}+(e^{0,5})^{2}+1-2e^{-0,5}+(e^{-0,5})^{2}$
$= 2+2e^{0,5}+e^{1}-2e^{-0,5}+e^{-1}$

Exercice 46P116

$$f(x) = e^{2x}-1-2x-2x^{2}$$

Exercice 47P116

Variations de $f(x) = (x^{2}-5x+2)e^{-2x}$
On a prouvé que $f'(x) = e^{-2x}\left(-2(x^{2}-5x+2)+(2x-5)\right)$
$= e^{-2x}(-2x^{2}+10x-4+2x-5) = e^{-2x}(-2x^{2}+12x-9)$
Le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x^{2}+12x-9$ car e^{-2x} est toujours positif
$\Delta = b^{2}-4ac = 12^{2}-4(-2)(-9) = 144-72 = 72$

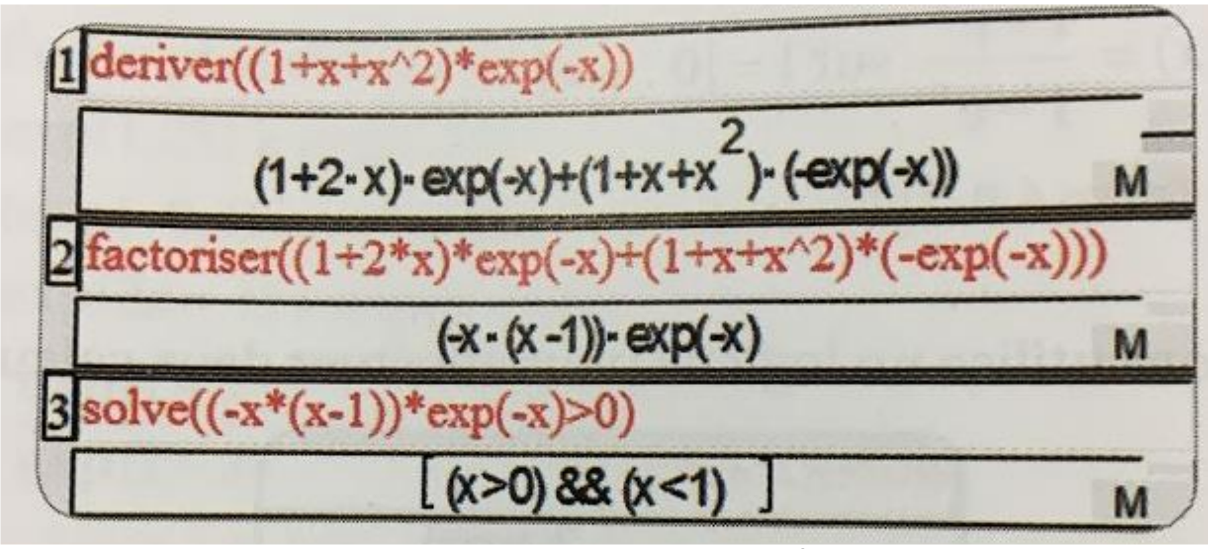
$\Delta > 0$ donc f' aura deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12-\sqrt{72}}{-4} \approx 5{,}12$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12+\sqrt{72}}{-4} \approx 0{,}88$

f' sera positive entre ses racines et négative à l'extérieur, et donc on aura f décroissante sur $]-\infty; x_2]$, croissante sur $[x_2; x_1]$ et pour finir décroissante sur $[x_1; +\infty[$

Exercice 47P116

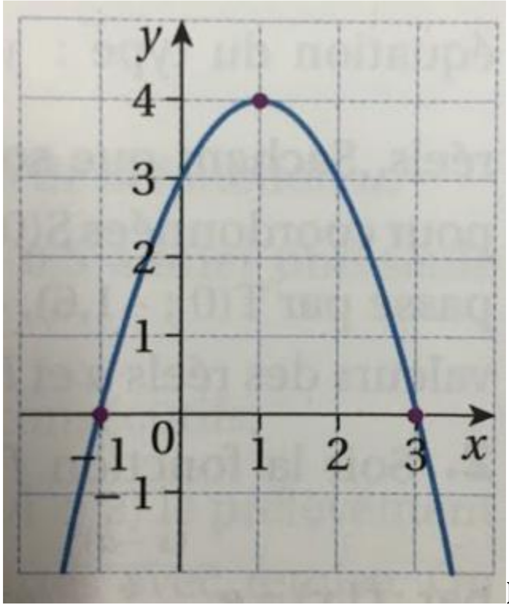
1) $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ donc $f'(x) = 2e^x - 2e^{2x}$
2) $f'(x) = 2e^x - 2e^{2x} = 2(e^x - e^{2x}) = 2(e^x 1 - e^x e^x) = 2e^x(1 - e^x)$
3) $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow e^0 > e^x \Leftrightarrow 0 > x$
4) On sait donc que la dérivée sera strictement positive sur $]0; +\infty[$ nulle en 0 et négative avant donc f décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$

Exercice 49P116



1) La fonction qui est ici dérivée est $f(x) = (1 + x + x^2)e^{-x}$
2) Le premier calcul est la recherche de la dérivée , et ici on obtient $f'(x) = (1 + 2x)e^{-x} + (1 + x + x^2)(-e^{-x})$
3) Ce n'est pas formidable pour une étude de signe donc on demande une factorisation et on obtient:
   $f'(x) = -x(x-1)e^{-x}$. On veut savoir quand est ce que la dérivée est positive donc on pose la question 3, qui nous dit que c'est vrai quand $x \in]-\infty; 0[$ et quand $x \in]1; +\infty[$, donc sur $]0; 1[$ et sur cet intervalles la fonction f sera croissante et donc ailleurs elle sera décroissante.

Exercice 54P117



Montrer que $u(x) = -(x+1)(x-3)$

$$(\mathrm{I})\begin{cases} u(-1) = 0 \\ u(1) = 4 \\ u(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \\ a1^2 + b1 + c = 4 \\ a3^2 + b3 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = 4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

Version obligatoire

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 4 & (L_2 - L_1) \\ a + b + c = 4 & \\ 8a + 2b = -4 & (L_3 - L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a + 2 + c = 4 \\ 8a + 4 = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 4 - 2 - a \\ 8a = -4 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 2 - (-1) \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Ainsi $u(x) = -1x^2 + 2x + 3$
$-(x+1)(x-3) = -(x^2 - 3x + x - 3) = -(x^2 - 2x - 3)$
$= -x^2 + 2x + 3 = u(x)$

Version spé

$$\Leftrightarrow AX = Y \text{ avec } = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et donc } X = A^{-1}Y \text{ avec } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & -1/4 & 1/8 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 3/8 & 3/4 & -1/8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Et ainsi } X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2 a) $u(x) = -1x^2 + 2x + 3$
$u'(x) = -2x + 2$
Etudions le signe de la dérivée :
$-2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -2 \Leftrightarrow \frac{-2x}{-2} \leq \frac{-2}{-2} \Leftrightarrow x \leq 1$
Ainsi $u'(x)$ est positive avant 1 et négative après.

Et u sera croissante avant 1 et décroissante après.,
b) $f(x) = e^{u(x)}$
Déterminons les variations de f
$f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$, comme l'exponentielle est toujours positive $e^{u(x)}$ sera elle aussi toujours positive. Et donc le signe de $f'(x)$ sera celui de $u'(x)$.