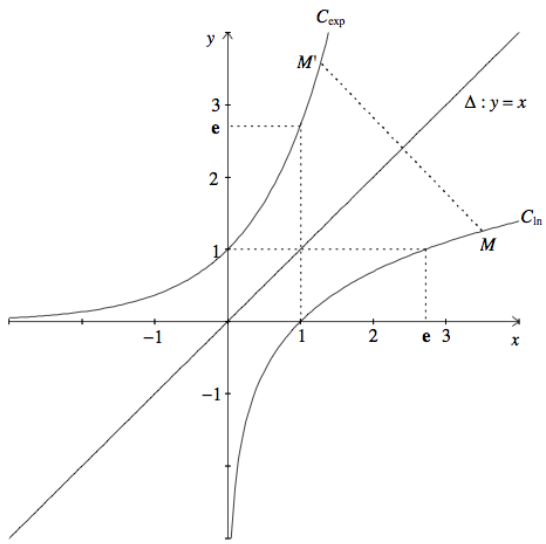
Fiche de révisions :
Contrôle : Exponentielles et Logarithmes

Etudes de variations

<u>Courbes</u>
elles sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$, car les fonctions sont inverses l'une de l'autre



<u>Dérivation :</u>

f	f'	$domaine\ de\ validité$	remarque
e^x	e^x	$]-\infty;+\infty[$	
e^u	$u'e^u$	$]-\infty;+\infty[$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	Intervalles ne contenant Pas 0	
$\ln(u)$	$\frac{u'}{u}$	Intervalles ne contenant Pas 0	Pas pour les ES

Pour les primitives il suffit de lire le tableau à l'envers.

<u>Limites</u>
Limites basiques (facile à lire sur la courbe)

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

Limites avancées (STL uniquement)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to0} x^n \ln(x) = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$

<u>Convexité (ES)</u>
La fonction exponentielle est convexe sur $]-\infty;+\infty[$, la fonction logarithme est concave sur $]0;+\infty[$

Simplifications d'écritures

A utiliser quand on vous demande de simplifier une expression ou souvent durant les résolutions d'équations et d'inéquations contenant du logarithme ou de l'exponentielle.

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ (pas de restriction) $\qquad$ $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ (avec $a > 0$ et $b > 0$)

l'expo transforme une somme en produit, et le logarithme fait le contraire

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ (pas de restriction) $\qquad$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ (avec $a > 0$ et $b > 0$)

$(e^a)^n = e^{a\times n}$ (pas de restriction) $\qquad$ $\ln(a^n) = n\ln(a)$ (avec $a > 0$)

Transformation $x = \ln(e^x)$ (pas de restriction) $\qquad$ $x = e^{\ln(x)}$ (avec $x > 0$)

Valeurs utiles $e^0 = 1$ $\qquad$ $\ln(1) = 0$ $\qquad$ $\ln(e)$

Résolution d'équations contenant du logarithme ou de l'exponentielle

Elles se résolvent généralement avec les formules :

Si a et b sont deux réels : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$ et $e^a > e^b \Leftrightarrow a > b$

Si a et b sont strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$

On peut rencontrer des équations/inéquations où l'inconnue est prisonnière du logarithme ou de l'exponentielle, dans ce cas il faudra arriver à se débarrasser de cette prison encombrante.

Méthode de résolution d'équations du type $\ln(3x + 5) - \ln(2) = \ln(1 - 5x) + \ln(3)$

1) recherche du domaine d'étude

L'équation n'a de sens que dans la mesure où les expressions à l'intérieur des fonctions logarithmes sont bien strictement positives.

Il nous faudrait avoir simultanément $2 > 0$, $3 > 0$, $3x - 5 > 0$ et $1 - 5x > 0$ les deux premières ne posent absolument aucun problème, elles sont tout le temps vraies, mais pour les deux autres inéquations ça va dépendre de x. $3x + 5 > 0 \Leftrightarrow 3x > -5 \Leftrightarrow x > \frac{-5}{3}$ de plus il faut que $1 - 5x > 0 \Leftrightarrow 1 > 5x \Leftrightarrow \frac{1}{5} > x$

Autrement dit il faut que $-\frac{5}{3} < x < \frac{1}{5}$ ainsi $D_e =]-\frac{5}{3}; \frac{1}{5}[$

Il est recommandé pour chaque inéquation de tracer avec une couleur différente les valeurs acceptables sur un axe, D_e correspondra à la zone qui a été coloriée dans toutes les couleurs.

2) la résolution proprement dite

le but est d'écrire une égalité (ou inégalité) de la forme $\ln(a) = \ln(b)$

puis en utilisant les propriétés du logarithme de résoudre une équation dont les x ont étés libérés du logarithme.

$\ln(3x + 5) - \ln(2) = \ln(1 - 5x) + \ln(3)$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{3x+5}{2}\right) = \ln\big((1 - 5x)3\big)$

$\Leftrightarrow \frac{3x+5}{2} = (1 - 5x)3$ car Si a et b sont strictement positifs, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$

$\Leftrightarrow 3x + 5 = 2(1 - 5x)3$ $\Leftrightarrow 3x + 5 = 6 - 30x \Leftrightarrow 33x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{33}$

3) conclusion

On vérifie que les solutions trouvées sont dans le domaine d'étude.

$\frac{1}{33} \approx 0{,}030$ et $\frac{1}{5} = 0{,}2$ donc $\frac{1}{33} \in]-\frac{5}{3}; \frac{1}{5}[$ c'est une solution acceptable

Ainsi $S = \left\{\frac{1}{33}\right\}$

<u>Méthode de résolution d'inéquations du type $\ln(3x + 5) - \ln(2) > \ln(1 - 5x) + \ln(3)$</u>

On va procéder comme pour l'équation, les différences sont :

- On utilisera la propriété Si a et b sont strictement positifs, $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$
- Il faut faire attention : une division ou une multiplication par un nombre négatif change l'ordre d'une inéquation.
- Au moment de la conclusion ça se complique : l'étape 2 se termine par : $x > \frac{1}{33}$ donc il nous faudra prendre les valeurs de D_e qui sont dans supérieure à $\frac{1}{33}$, en faisant un dessin ça peut aider à y voir plus clair. Ici ça donnera $S =]\frac{1}{33}; \frac{1}{5}[$

Variantes

Si jamais il y a dans une équation contenant des logarithmes, un ou plusieurs éléments sans logarithmes

Si c'est une constante isolée : exemple : $\ln(1 - 5x) + 7 = \ln(1 - 5x) + \ln(e^7) = \ln\big((1 - 5x)e^7\big) =$...

Si c'est une constante multiplicative : exemple : $2\ln(1 - 5x) = \ln((1 - 5x)^2)$

Equations de la forme $ae^{2x}+be^x+c=0$ (ou $a(\ln x)^2+b\ln(x)+c=0$)

Ce sont des équations du second degré où l'inconnue x habituelle a été remplacée par e^x (ou $\ln(x)$)

D'abord on résoudra l'équation $aX^2+bX+c=0$

Puis on écrira que l'équation de départ est équivalente à $\begin{cases} aX^2+bX+c=0 \\ X=e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1=\cdots ou\ X_2=\cdots \\ X=e^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^x=\cdots ou\ e^x=\cdots$ attention si une des racines de $aX^2+bX+c=0$ est négative elle donnera pas de solution

Exemples :

Résoudre $3e^{2x}+5e^x-7>0$

Tout d'abord, même si ça n'est pas demandé on s'occupe de $3A^2+5A-7=0$ j'ai choisi A comme inconnue mais j'aurai pu choisir X , ça ne fait pas de différence question méthode

$\Delta=5^2-4\times 3\times(-7)=25+84=109$ on aura deux racines : $A_1=\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\approx -2{,}57$ et $A_2=\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\approx 0{,}91$

Et donc $3A^2+5A-7>0$ aura pour solutions : $S_A=]-\infty;A_1[\cup]A_2;+\infty[$

Ainsi : $3e^{2x}+5e^x-7=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3A^2+5A-7>0 \\ A=e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\ ou\ A=\frac{-5+\sqrt{109}}{6} \\ A=e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A<A_1\ ou\ A>A_2 \\ A=e^x \end{cases}$

$\Leftrightarrow e^x<\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\ ou\ e^x>\frac{-5+\sqrt{109}}{6} \Leftrightarrow rien\ ou\ x=e^{\ln\left(\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)}$ car une exponentielle ne peut jamais être négative

$\Leftrightarrow x>\ln\left(\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)$ $\qquad S=]\frac{-5+\sqrt{109}}{6};+\infty[$

Résoudre $9(\ln x)^2-12\ln x+4\ =0$ avec $x>0$

Tout d'abord, même si ça n'est pas demandé on s'occupe de $9B^2-12B+4=0$

$\Delta=(-12)^2-4\times 9\times 4=0$ donc il n'y a qu'une solution : $B_0=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$

$9(\ln x)^2-12\ln x+4\ =0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9B^2-12B+4=0 \\ B=\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\frac{2}{3} \\ B=\ln x \end{cases} \Leftrightarrow \ln x=\frac{2}{3} \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x=e^{\frac{2}{3}}$

S=$\left\{e^{\frac{2}{3}}\right\}$

Utilisation du logarithme pour résoudre un problème utilisant les suites

On peut vous demander quand est-ce qu'une suite géométrique dépasse un seuil pour la première fois, ce qui se traduit par une inéquation.

Exemple commenté

Soit (U_n) la suite géométrique définie pour tout n entier naturel par $u_n=990\times 0{,}7^n$, quand passe-t-on sous le seuil de 5 ?

$u_n\le 5 \quad \Leftrightarrow 990\times 0{,}7^n\le 5$ reformulation

$\Leftrightarrow 0{,}7^n\le\frac{5}{990}$ on essaye d'isoler le n au maximum

$\Leftrightarrow \ln(0{,}7^n)\le\ln\left(\frac{5}{990}\right)$ pour « abaisser » le n le logarithme s'avère très utile

$\Leftrightarrow n\ \ln(0{,}7)\le\ln\left(\frac{5}{990}\right)$ on applique $\ln(a^n)=n\ln(a)$

$\Leftrightarrow n\ge\frac{\ln\left(\frac{5}{990}\right)}{\ln(0{,}7)}$ attention la division par un nombre négatif (ici $\ln(0{,}7)$) change l'ordre

Or $\frac{\ln\left(\frac{5}{990}\right)}{\ln(0{,}7)}\approx 14{,}8$

Donc on passe sous le seuil entre 14et 15 , donc le premier n pour lequel on sera sous le seuil sera 15

Révision 2nde

Etude de la position d'une courbe par rapport à une autre

Si on veut étudier la position de C_f la courbe de la fonction f , par rapport à C_g la courbe de la fonction g, on étudiera le signe de $f(x)-g(x)$,

- quand l'expression est positive on a $f(x)\ge g(x)$ et donc C_f est au-dessus de C_g
- quand l'expression est négative on a $f(x)\le g(x)$ et donc C_f est en dessous de C_g