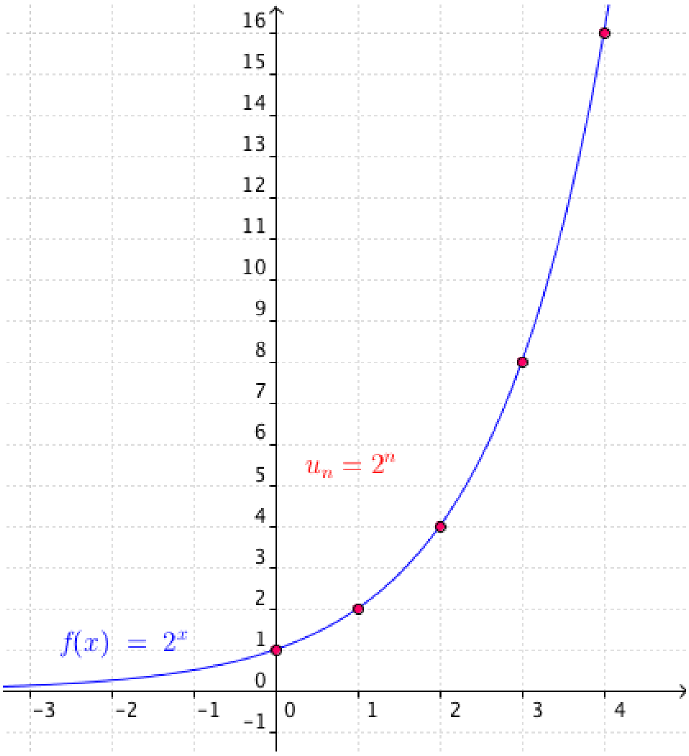
FONCTIONS EXPONENTIELLES

I. Fonction exponentielle de base q

1) Définition

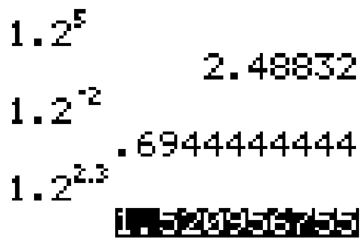
On considère la suite géométrique de raison q définie par $u_n = q^n$.
Elle est définie pour tout entier naturel n.
En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base q.
Ainsi par exemple :
Pour une suite, on a $u_4 = 2^4$
Pour une fonction, on a $f(4) = 2^4$ mais on a aussi $f(1,3) = 2^{1,3}$



Définition : La fonction $x \mapsto q^x$, avec , s'appelle fonction exponentielle de base q.

Exemple :
La fonction exponentielle de base 1,2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 1,2^x$.

Remarque : Avec la calculatrice, il est possible de calculer des valeurs d'une fonction exponentielle de base q.



A noter : $x^{0,5} = \sqrt{x}$

Propriété : La fonction exponentielle de base q est définie, strictement positive, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Propriétés

Relation fonctionnelle : Pour tout réel x et y, on a $q^{x+y} = q^x \times q^y$

Remarque : Cette formule permet de transformer une somme en produit et réciproquement.

Propriétés : Pour tout réel x et y, on a :

a) $q^0 = 1$ et $q^1 = q$

b) $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$

c) $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

d) $\left(q^x\right)^n = q^{nx}$ avec n un entier relatif.

Démonstration de b et c :

b) $q^x q^{-x} = q^{x-x} = q^0 = 1$ donc $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$.   c) $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x q^{-y} = q^x \dfrac{1}{q^y} = \dfrac{q^x}{q^y}$

<u>Méthode :</u> Simplifier une expression

Simplifier les expressions suivantes :

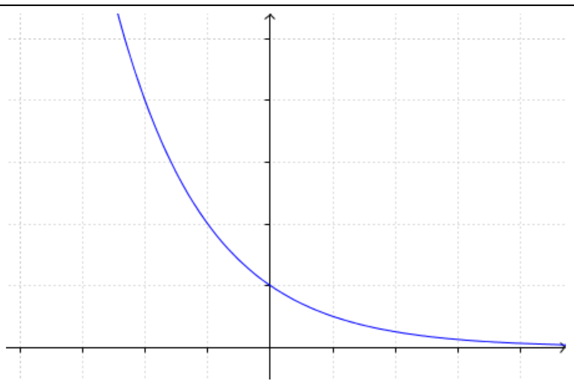
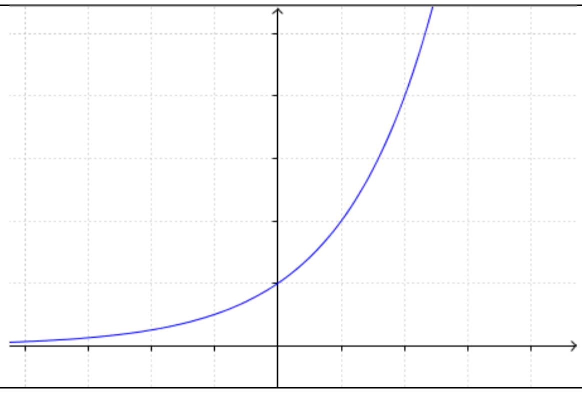
$A = 4^{-3}$ ´ 4^{-5} $B = \dfrac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$ $C = \left(4{,}8^3\right)^{-2,1} \times 4{,}8^{6,2}$

A=$4^{-3} \times 4^{-5} = 4^{-3+(-5)} = 4^{-8}$

$B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5} = \frac{3^{3+(-2,5)}}{(3^2)^5} = \frac{3^{0,5}}{3^{10}} = 3^{0,5-10} = 3^{-9,5}$

$C = (4{,}8^3)^{-2,1} \times 4{,}8^{6,2} = 4{,}8^{-6,3} \times 4{,}8^{6,2} = 4{,}8^{-6,3+6,2} = 4{,}8^{-0,1}$

II. Variations de la fonction exponentielle de base q

$0 < q < 1$	$q > 1$
$x \mapsto q^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$	$x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} q^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} q^x = +\infty$
	

<u>Remarques :</u>

- Si $q = 1$ alors la fonction exponentielle de base q est constante. En effet, dans ce cas, $q^x = 1^x = 1$
- Quel que soit q, la fonction exponentielle de base q passe par le point (0 ; 1). En effet, $q^0 = 1$.
- La fonction exponentielle de base q est convexe.

<u>Méthode :</u> Utiliser une fonction exponentielle de base q

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur [0 ; 10] par : $f(x) = 50000 \times 1{,}15^x$.

a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) Déterminer les variations de f sur [0 ; 10].
c) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?

$50000*1.15^3$
76043.75
$50000*1.15^{5.5}$
107847.0143

a) $f(3) = 50000 \times 1{,}15^3 \approx 76000$

$f(5{,}5) = 50000 \times 1{,}15^{5{,}5} \approx 108000$

X	Y1
4.91	99311
4.92	99450
4.93	99589
4.94	99728
4.95	99868
4.96	100007
4.97	100147

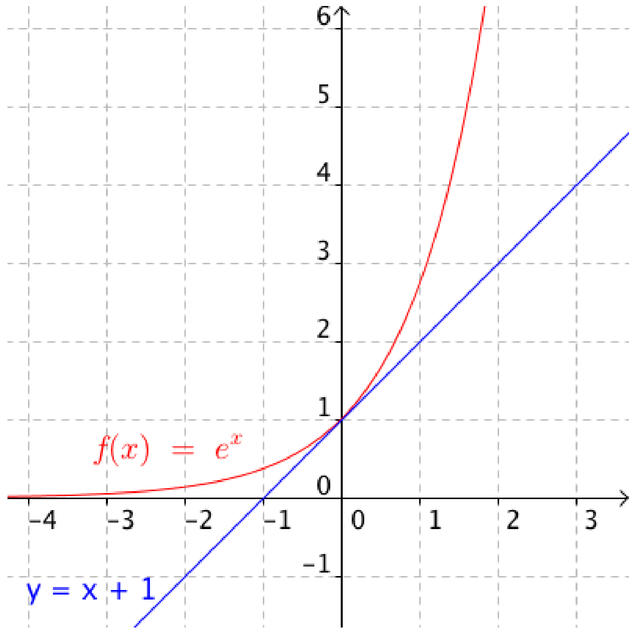
X=4.96

b) 1,15 > 1 donc la fonction $x \mapsto 1{,}15^x$ est strictement croissante sur [0 ; 10].
Il en est de même pour la fonction *f*.

c) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

III. Fonction exponentielle de base *e*

1) Définition



Propriété : Parmi toutes les fonctions $x \mapsto q^x$, il en existe une seule dont la tangente à la courbe représentative au point (0 ; 1) a pour coefficient directeur 1.

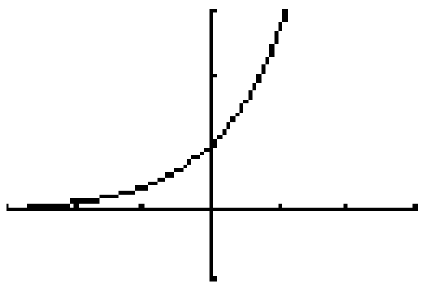
- Admis -

Définition : Cette fonction est la fonction exponentielle de base *e*, notée **exp**, telle que pour tout réel *x*, on a $\exp : x \mapsto e^x$.
Le réel *e* est environ égal à 2,718.

Remarques : Avec la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée de *e*.

e^1
2.718281828

Il est également possible d'observer l'allure de la courbe représentative de la fonction exponentielle :



Remarque : On verra que la fonction exponentielle est croissante. Mais sa croissance est très rapide, ainsi exp(21) dépasse le milliard.

2) Propriétés

Propriétés : Pour tout réel *x* et *y*, on a :

a) $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

b) $e^x > 0$

c) $e^{x+y} = e^x e^y$

d) $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

e) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$

f) $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$ avec *n* un entier relatif.

Remarque : On retrouve les propriétés des puissances.

Méthode : Simplifier les écritures

Simplifier l'écriture des nombres suivants : $A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$ $\quad B = (e^5)^{-6} \times e^{-3}$ $\quad C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}}$

$A = \frac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}} = \frac{e^{7+(-4)}}{e^{-5}} = e^{3+5} = e^8$

$B = (e^5)^{-6} \times e^{-3} = e^{-30} \times e^{-3} = e^{-30+(-3)} = e^{-33}$

$$C = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3\times 2}} + \frac{e^{-4}}{e^{2+(-6)}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^{-(-6)} + 1 = e^6 + 1$$

3) Dérivabilité

Propriété : Le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0 est égal à 1.

Démonstration :
Par définition, la tangente à la courbe représentative en 0 a pour coefficient directeur 1.

Propriété : La fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\exp x)' = e^x$

Méthode : Dériver une fonction
Dériver les fonctions suivantes :

a) $f(x) = 4x - 3e^x$ $\quad$ b) $g(x) = (x-1)e^x$ $\quad$ c) $h(x) = \frac{e^x}{x}$

a) $f'(x) = 4 - 3e^x$

b) $g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x = e^x + xe^x - e^x = xe^x$ $\quad$ c) $h'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$

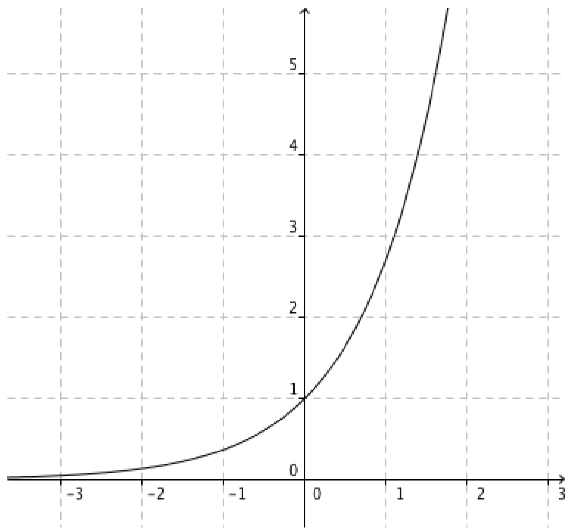
4) Variations

Propriété : La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : Comme $(\exp x)' = \exp x > 0$, la fonction exponentielle est strictement croissante.

5) Limites en l'infini

Propriété : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$



6) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$(\exp x)'$	+
$\exp x$	0 ↗ $+\infty$

Méthode : Etudier une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

a) $f'(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

b) Comme $e^x>0$, $f'(x)$ est du signe de $x+2$.

f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2;+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	↘		$-e^{-2}$		↗

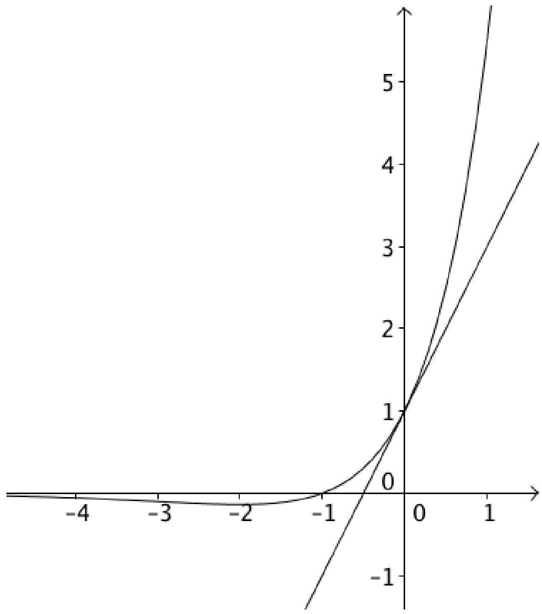
c) $f(0)=1$ et $f'(0)=2$

Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc :

$y=f'(0)(x-0)+f(0)$, soit :

$y=2x+1$

d)



7) Résolution d'équations et d'inéquations

Propriétés : Pour tout réel a et b, on a :

a) $e^a=e^b \Leftrightarrow a=b$ b) $e^a<e^b \Leftrightarrow a<b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0$. b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1}\geq 1$.

a) $e^{x^2-3}-e^{-2x}=0 \Leftrightarrow e^{x^2-3}=e^{-2x} \Leftrightarrow x^2-3=-2x \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow x=-3$ ou $x=1$

Les solutions sont -3 et 1.

b) $e^{4x-1}\geq 1 \Leftrightarrow e^{4x-1}\geq e^0 \Leftrightarrow 4x-1\geq 0 \Leftrightarrow 4x\geq 1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{4}$

L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$.

IV. Fonctions de la forme e^u

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.

La fonction $x\mapsto e^u$ est dérivable sur I. Sa dérivée est la fonction $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

Exemple : Soit $f(x)=e^{4x+3}$ alors $f'(x)=4e^{4x+3}$

Propriété : Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Les fonctions $x \mapsto u(x)$ et $x \mapsto e^{u(x)}$ ont le même sens de variation.

Démonstration :

On a $(e^u)' = u'e^u$ Comme $e^u > 0$, u' et $(e^u)'$ sont de même signe.

Exemple :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ donc la fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}$ est également décroissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Méthode : Etudier une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$.

a) Calculer la dérivée de la fonction f.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

c) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice graphique.

d) Déterminer une valeur approchée de l'abscisse du point d'inflexion à la courbe.

e) Démontrer que $f''(x) = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$.

f) En déduire l'abscisse du point d'inflexion.

a) $f'(x) = e^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

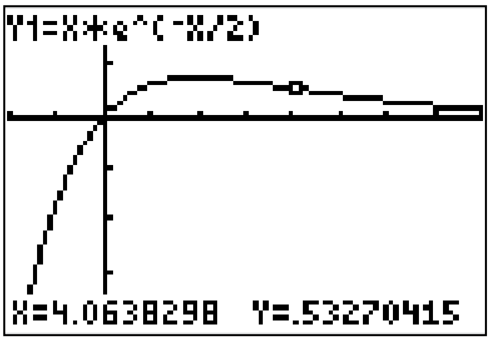
b) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1 - \frac{x}{2}$.

f est donc croissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$ et décroissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘	

$f(2) = 2e^{-\frac{2}{2}} = 2e^{-1} = 2\frac{1}{e} = \frac{2}{e}$



c)

d) Le point d'inflexion semble avoir pour abscisse une valeur proche de 4.

e) $f''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}} = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}} = \left(\frac{x}{4} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$

f) Comme $e^{-\frac{x}{2}} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $\frac{x}{4} - 1$. Donc $f''(x) \geq 0$ pour $\frac{x}{4} - 1 \geq 0$ soit $x \geq 4$.

$f''(x) \leq 0$ pour $\frac{x}{4} - 1 \leq 0$ soit $x \leq 4$.

Ainsi f' est croissante sur $[4;+\infty[$ et donc f est convexe sur cet intervalle.

f' est décroissante sur $]-\infty;4]$ et donc f est concave sur cet intervalle.

On en déduit que la courbe représentative de f possède un point d'inflexion d'abscisse 4.