Plus loin sur la fiche vous trouverez des corrections d'exercices du livre

Séance du 11 octobre

Exercice 1

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_2 = 20$ et de raison $q = 0{,}5$

1) Calculer u_3, u_4 et u_5
2) Donner une formule explicite (en fonction de n) de $S_n = u_2 + u_3 + \cdots + u_n$
3) Déterminer la limite de u et celle de S

Exercice 2

Soit w la suite définie par tout n entier naturel par $w_n = 50 + 20 \times 1{,}1^n$

Dire quand est ce que w_n dépasse 1 000 000

Corrections :

Exercice 1

1) $u_3 = u_2 \times 0{,}5 = 10$, $u_4 = 5$ et $u_5 = 2{,}5$
2) $S_n = premier\ terme\ \times \frac{1-q^{nbr\ de\ termes}}{1-q} = u_2\ \times \frac{1-0{,}5^{dernier\ rang - premier\ rang+1}}{1-q}$
   $= 20\ \times \frac{1-0{,}5^{n-2+1}}{1-0{,}5} = 20\ \times \frac{1-0{,}5^{n-1}}{0{,}5} = \frac{20}{0{,}5}\ (1-0{,}5^{n-1}) = 40(1-0{,}5^{n-1})$
3) La suite géométrique (u_n) a un premier terme $u_2 = 20 > 0$, et de raison $q = 0{,}5 \in]0;1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
   $0{,}5^{n-1} = 0{,}5^n \times 0{,}5^{-1}$ correspond à une suite géométrique de raison $0{,}5 \in]0;1[$ et de premier terme $0{,}5^{-1} > 0$ donc $0{,}5^{n-1}$ a pour limite 0.
   Ainsi $(1-0{,}5^{n-1})$ a pour limite 1 et $40(1-0{,}5^{n-1})$ a pour limite 40.
   Conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 40$.

Exercice 2

Avant de prendre la calculatrice ci je n'ai pas d'idée de ce que je vais écrire je peux me lancer sur le papier pour me faire une idée.

Ça donnerai :

$u_0 = 50 + 20 \times 1{,}1^0 = 70$ je n'ai pas dépassé le million donc je continue

$u_1 = 50 + 20 \times 1{,}1^1 = 72$ ‘ ‘ ‘ ‘ ‘

‘ ‘ ‘ ‘ ‘ ‘ ‘ ‘‘ ‘ ‘‘

$u_{mystère} = \cdots > 1\ 000\ 000$ cool je peux arrêter

La réponse attendue est donc : « mystère »

Autrement dit je vais devoir calculer les termes de ma suite encore et encore et encore … tant que mon résultat est plus petit que 1 000 000

Une fois que je dépasse enfin le million je regarde l'indice de mon terme

J'écris le programme suivant :

```
PROGRAM:SUITE
:0→N
:70→U
:While U<1000000
:N+1→N
:50+20*1.1^N→U
:End
:Disp N
```

Il m'affiche 114 donc la suite u dépasse le million pour la première fois quand $n = 114$
La suite géométrique (u_n) a un premier terme $u_2 = 20 > 0$, et de raison $q = 0{,}5 \in]0; 1[$ donc la suite est décroissante.

Exercice cahier de cours

Soit (v_n) la suite définie par tout entier n par $v_n = 8 \times 5^n$
$S_n = v_2 + \cdots + v_n$
Formule explicite de S_n :
$S_n = premier\ terme\ \times \frac{1-q^{nbr\ de\ termes}}{1-q} = v_2 \frac{1-5^{n-2+1}}{1-5} = (8 \times 5^2)\frac{1-5^{n-1}}{-4} = \frac{200}{-4}(1-5^{n-1})$
$= -50(1-5^{n-1})$
En terme de limite : $5^{n-1} = 5^n \times 5^{-1}$ correspond à une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $5^{-1} = 0{,}2$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^{n-1} = +\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -5^{n-1} = -\infty$
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-5^{n-1}) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -50(1-5^{n-1}) = +\infty$

Exercice 48P46
Pour cet exercice les suites sont de la forme q^n
Il suffit de regarder si $0 < q < 1$ ou si $q > 1$ pour se prononcer

$u_n = 3^n$	$q > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
$v_n = 0{,}5^n$	$q = 0{,}5 \in]0; 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
$w_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$	$q = \frac{5}{4} = 1{,}25 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$
$t_n = \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$q = \frac{1}{3} \in]0; 1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

Exercice 61P46
A
si $u_n = 2^n + 8$ alors $u_{n+1} = 2^{n+1} + 8$
de plus $2u_n - 8 = 2(2^n + 8) - 8 = 2\ 2^n + 16 - 8 = 2^{n+1} + 8$
ainsi on a bien $u_{n+1} = 2u_n - 8$
B
si $u_n = -8n$ alors $u_{n+1} = -8(n+1) = -8n - 8$
de plus $2u_n - 8 = 2(-8n) - 8 = -16n - 8 \neq -8n - 8$
ainsi on n'a pas $u_{n+1} \neq 2u_n - 8$
C
si $u_n = 4^n - 5$ alors $u_{n+1} = 4^{n+1} - 5$
de plus $2u_n - 8 = 2(4^n - 5) - 8 = 2 \times 4^n - 10 - 8 = 2 \times 4^n - 18$
là on peut avoir un doute les deux expressions sont elles vraiment différentes ou c'est juste que je n'ai pas su les simplifier assez pour voir qu'elles sont égales
on peut tester avec différentes valeurs de n
si $n = 0$ alors $4^{n+1} - 5 = 4 - 5 = -1$ et $2 \times 4^n - 18 = 2 - 18 = -16$ du coup pour $n = 0$ on n'a pas : $u_{n+1} \neq 2u_n - 8$ donc c'est cuit ! l'égalité est fausse (on dit qu'elle est vraie quand elle est tout le temps vraie)
D
si $u_n = 4(2^n + 2)$ alors $u_{n+1} = 4(2^{n+1} + 2) = 4 \times 2^{n+1} + 8$
de plus $2u_n - 8 = 2 \times 4(2^n + 2) - 8 = 2 \times 4 \times 2^n + 2 \times 4 \times 2 - 8 = 4 \times 2 \times 2^n + 8 = 4 \times 2^{n+1} + 8$

ainsi on a bien $u_{n+1} = 2u_n - 8$

Pour l’exercice 65P47
Regardez la vidéo : https://www.youtube.com/watch?v=L7bBL4z-r90&feature=youtu.be
L’exercice sera corrigé en détail en classe.

Exercice 45P46

La suite u en bleu ne converge pas car même si de plus en plus de termes vont valoir 4, il y aura toujours des termes valant de 3 donc on ne peut dire que globalement les termes sont de plus en plus proches de 4.

La suite v en rouge converge vers -4, car les termes qui ne valent pas -4 se rapprochent progressivement de cette valeur alors que le rang s'accroit.

Exercice 67P48

a) $u_1 = 4u_0 - 3 = 4 \times 2 - 3 = 5$ $u_2 = 4u_1 - 3 = 4 \times 5 - 3 = 17$

b) $v_n = u_n - 1$ donc $v_{n+1} = u_{n+1} - 1$ or $u_{n+1} = 4u_n - 3$ donc $v_{n+1} = (4u_n - 3\,) - 1 = 4u_n - 4 = 4(u_n - 1)$

or $v_n = u_n - 1$ donc $v_{n+1} = 4v_n$ ainsi v est géométrique de raison 4 et de premier terme $v_0 = u_0 - 1 = 1$

c) on en déduit que $v_n = v_0 q^n = 1 \times 4^n$ or comme $v_n = u_n - 1$ on aura $v_n + 1 = u_n$ et donc $u_n = 4^n + 1$.

Exercice 50P46

$u_n = 2^n - 1$ comme 2>1 on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$

$v_n = 0{,}5^n - 2$ comme $0 \leq 0{,}5 < 1$ on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} 0{,}5^n = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} v_n = -2$

$w_n = (1/3)^n - 1/2$ comme $0 \leq 1/3 < 1$ on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} (1/3)^n = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} w_n = -1/2$

Exercice 85P51

1.a. augmenter une quantité de 1% revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{1}{100}\right)$ donc avant d'effectuer son premier remboursement il doit $1000\left(1 + \frac{1}{100}\right) = 1010$€ à la banque.

b. il rembourse alors 30€ et donc il doit encore $1010 - 30 = 980$ ainsi :

$M_1 = 1000\left(1 + \frac{1}{100}\right) - 30 = 980$

c. $M_{n+1} = M_n\left(1 + \frac{1}{100}\right) - 30 = 1{,}01M_n - 30$

2.a. u est arithmético-géométrique

b. comme $v_n = u_n - 3000$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000$

or $u_{n+1} = u_n 1{,}01 - 30$ donc $v_{n+1} = (1{,}01u_n - 30) - 3000 = 1{,}01u_n - 3030$

or $v_n = u_n - 3000$ donc $v_n + 3000 = u_n$ et surtout :

$v_{n+1} = 1{,}01(v_n + 3000) - 3030 = 1{,}01v_n + 3030 - 3030 = 1{,}01v_n$ et donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,01 et de premier terme $v_0 = u_0 - 3000 = 1000 - 3000 = -2000$

c. ainsi $v_n = -2000 \times 1{,}01^n$ et donc $u_n = v_n + 3000 = 3000 - 2000 \times 1{,}01^n$

d. 0-> N 1000->U While U>0 N+1->N

U=3000-2000*1.01^N End Disp N

e. le programme m'affiche 41, donc on a remboursé pendant 41 mois la somme de 30€ autrement dit $41 \times 30 = 1230$

cependant quand je tape U j'obtiens -7,5 donc en fait le dernier remboursement n'est pas à 30 mais à 30-7,5 et donc en tout on a remboursé 1230-7,5=1222,5€

Exercice 101P55

Partie A

1. $u_1 = 4000\left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right) = 4140$ $u_2 = 4140\left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right) = 4284{,}9$

2. $u_{n+1} = \left(1 + \frac{3{,}5}{100}\right)u_n = 1{,}035u_n$ 3. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 4000 \times 1{,}035^n$

4. au bout de 6 ans le capital est $u_6 \approx 4917$€

Partie B

1. $v_1 = 1000\left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right) + 50 = 1052{,}5$ $v_2 = 1052{,}5\left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right) + 50 = 1105{,}13125$

2. $v_{n+1} = \left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right)v_n + 50$

3. $w_{n+1} = v_{n+1} + 20000 = \left(\left(1 + \frac{0{,}25}{100}\right)v_n + 50\right) + 20000$

$= 1{,}0025v_n + 20050 = 1{,}0025(u_n - 20000) + 20050 = 1{,}0025w_n$

Donc (w_n) est géométrique de raison 1,0025 et de premier terme $w_0 = 21\,000$

4. on a $w_n = 21\,000 \times 1{,}0025^n$ donc $v_n = w_n - 20\,000 = 21\,000 \times 1{,}0025^n - 20\,000$
Au bout de 6 ans , ou de 72 mois elle aura $w_{72} = 21\,000 \times 1{,}0025^{72} - 20\,000 \approx 5136€$

Exercice 102 P56

Partie 1

1)

	Janvier 2012	Février 2012	Mars 2012
Rand du mois	0	1	2
Recette	2300	2323	2346,23
coûts	800	820	840,5
Bénéfice	1500	1503	1505.73

2a) R_n et C_n sont des suites géométriques de raison respectives $1 + \frac{1}{100}$ et $1 + \frac{2,5}{100}$ et de premier terme respectif $R_0 = 2300$ et $C_0 = 800$ on a donc $R_n = R_0 q^n = 2300 \times 1{,}01^n$ et $C_n = 800 \times 1{,}025^n$
b) $B_n = R_n - C_n = 2300 \times 1{,}01^n - 800 \times 1{,}025^n$

3a) $B_n = 2300 \times 1{,}01^n - 800 \times 1{,}025^n$ donc $B_{n+1} = 2300 \times 1{,}01^{n+1} - 800 \times 1{,}025^{n+1}$ et ainsi
$B_{n+1} - B_n = 2300 \times 1{,}01^{n+1} - 800 \times 1{,}025^{n+1} - (2300 \times 1{,}01^n - 800 \times 1{,}025^n)$
$= 2300 \times (1{,}01^{n+1} - 1{,}01^n) - 800(1{,}025^{n+1} - 1{,}025^n)$
$= 2300 \times 1{,}01^n(1{,}01 - 1) - 800 \times 1{,}025^n(1{,}025 - 1) = 23 \times 1{,}01^n - 20 \times 1{,}025^n$
b) $23 \times 1{,}01^n - 20 \times 1{,}025^n > 0 \Leftrightarrow 23 \times 1{,}01^n > 20 \times 1{,}025^n \Leftrightarrow 1{,}01^n > \frac{20}{23} \times 1{,}025^n$
$\Leftrightarrow \frac{1{,}01^n}{1{,}025^n} > \frac{20}{23} \Leftrightarrow \left(\frac{1{,}01}{1{,}025}\right)^n > \frac{20}{23}$
c) $\left(\frac{1{,}01}{1{,}025}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1{,}01}{1{,}025} \approx 0{,}99$ donc comprise strictement entre -1 et 1 , de plus cette suite est de premier terme positif valant 1 donc sa limite sera 0.
Ça veut dire que plus n est grand plus $\left(\frac{1{,}01}{1{,}025}\right)^n$ se rapproche de 0 donc au bout d'un moment on n'aura plus avoir $\left(\frac{1{,}01}{1{,}025}\right)^n > \frac{20}{23}$ donc on n'aura plus $B_{n+1} - B_n > 0$ donc on n'a plus $B_{n+1} > B_n$ la suite sera donc décroissante.

algorithme	**TI**	**Casio**
On assigne à N la valeur 0	$0 \to N$	$0 \to N$
Tant que $\left(\frac{1{,}01}{1{,}025}\right)^n > \frac{20}{23}$	While (1,01/1,025)^N>20/23	While (1,01/1,025)^N>20/23
Augmenter N	$N + 1 \to N$	$N + 1 \to N$
Fin du tant que	End	EndWhile
Afficher N	Disp N	N

4)

Partie B

1) $1{,}025^n\left(2300 \times \frac{1{,}01^n}{1{,}025^n} - 800\right) = 2300 \times \frac{1{,}01^n}{1{,}025^n}1{,}025^n - 800 \times 1{,}025^n = 2300 \times 1{,}01^n - 800 \times 1{,}025^n = B_n$
2) $1{,}025^n$ est une suite géométrique de raison plus grande que 1 valant ici 1,025 et de premier terme positif valant 1 donc $\lim_{n \to +\infty} 1{,}025^n = +\infty$

On a montré à la question 3c) que $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2300\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2300\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n - 800 = -800$

b) $\lim_{n\to+\infty} 1,025^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 2300\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n - 800 = -800$ et donc par produit $\lim_{n\to+\infty} B_n = -\infty$ ce qui veut dire que le bénéfice passera à un moment ou a un autre sous 0 et y restera donc l'artisan se retrouvera en déficit à un moment ou a un autre pour y rester.

3)

algorithme	TI	Casio
On assigne à N la valeur 0	$0 \to N$	$0 \to N$
Tant que $2300 \times 1,01^n - 800 \times 1,025^n > 0$	While 2300×1,01^N-800×1,025^N >0	While 2300×1,01^N-800×1,025^N >0
Augmenter N	$N+1 \to N$	$N+1 \to N$
Fin du tant que	End	EndWhile
Afficher N	Disp N	N

Partie C

1) $SR_n = R_0 + R_1 + \cdots + R_n = R_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2300\frac{1-1,01^{n+1}}{1-1,01}$
2) $SC_n = C_0 + C_1 + \cdots + C_n = C_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 800\frac{1-1,025^{n+1}}{1-1,025}$
3) $SB_n = SR_n - SC_n = 2300\frac{1-1,01^{n+1}}{1-1,01} - 800\frac{1-1,025^{n+1}}{1-1,025}$
4) La première année le bénéfice total correspondra à la somme des 12 premiers bénéfices soit $SB_{12} = 2300\frac{1-1,01^{13}}{1-1,01} - 800\frac{1-1,025^{13}}{1-1,025} \approx 19649,10$

103P56

1)a) **Méthode 1** :
je vais prouver que l'écart entre deux terme consécutifs de la suite est une constant.
$v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n$
$= \frac{(n+2)((n+2)+1)}{2} - 2\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\left((n+2)(n+3) - 2(n+1)(n+2) + n(n+1)\right)$
$= \frac{1}{2}(n^2 + 5n + 6 - (2n^2 + 6n + 4) + n^2 + n)) = \frac{1}{2}(2n^2 + 6n + 6 - 2n^2 - 6n - 4) = \frac{1}{2}2 = 1$
donc on passe d'un terme au suivant en ajoutant 1.

Méthode 2

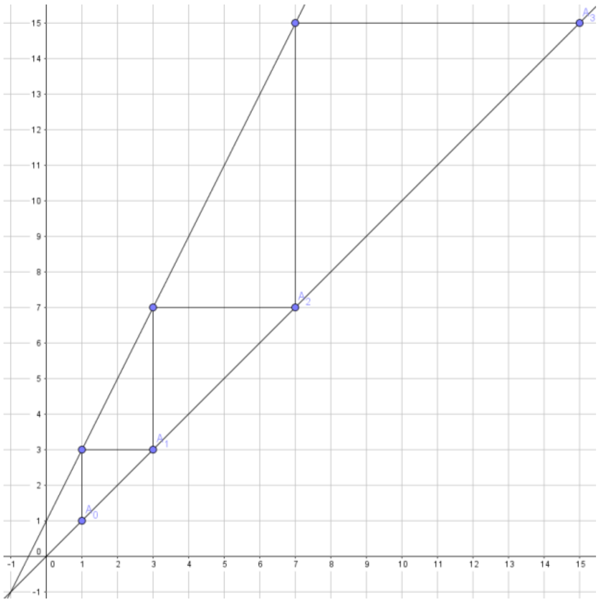
Rappel : si une suite (u_n) a son écriture en fonction de n sous la forme $u_n = an + b$ alors elle est de raison a et de premier terme $u_0 = b$
$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)[(n+2)-n]}{2} = \frac{(n+1)2}{2} = 1n + 1$
D'après le cours de 1ES la suite est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = 1$
b) voir méthode 2 : $v_n = 1n + 1$
2) a) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1})$
$= u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1}$ il y a beaucoup d'annulation $S_n = u_n - u_0$
b) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + n$ (on a utilisé la formule du 1b))
de plus $S_n = u_n - u_0 = \frac{n(n+1)}{2} - 0 = \frac{n(n+1)}{2}$ ainsi $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
3a) on veut $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ donc j'utilise $\frac{n(n+1)}{2}$ avec n qui vaut 100
$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$
b) $0 + 2 + 4 + 6 + .. + 98 = 2(0 + 1 + 2 + 3 + 49) = 2\left(\frac{49(49+1)}{2}\right) = 2450$

à mon avis il y a une erreur d'énoncé, ça serait plus intéréssant de demander les entiers inférieurs ou égaux à 100 : $0+2+4+6+..+100 = 2(0+1+2+3+50) = 2\left(\frac{50(50+1)}{2}\right) = 2550$

c)$X = 1+3+5+\cdots+99$ en fait si on ajoute cette somme à celle que la question 3b et à 100 on a la somme de tous les entiers allant de 0 à 100 et donc X+2450+100=5050 $\Leftrightarrow X = 5050 - 2450 - 100 \Leftrightarrow X = 2500$

Exercice 104P57

Partie A



a)b) $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 7$ et $u_3 = 15$

c) les droites dessinées sont d'équation $y = x$ et $y = 2x+1$

donc la relation entre deux termes consécutifs sera donnée par $u_{n+1} = 2u_n + 1$

d) la suite semble croissante et avoir pour limite $+\infty$

Partie B

a) Pour montrer que (w_n) est géométrique on va exprimer w_{n+1} en fonction de w_n on utilisera $w_n = v_n + 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$

$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = (2v_n + 1) + 1 = 2v_n + 2$ or $w_n = v_n + 1$ et $v_n = w_n - 1$ et donc $w_{n+1} = 2v_n + 2 = 2(w_n - 1) + 2 = 2w_n - 2 + 2 = 2w_n$

Ainsi $w_{n+1} = 2w_n$ de plus $w_0 = v_0 + 1 = 2$ donc (w_n) est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2

b) … et donc $w_n = w_0 \times q^n = 2 \times 2^n$ et donc $v_n = w_n - 1 = 2 \times 2^n - 1$

c) on a une suite géométrique de premier terme positif et de raison plus grande que 1 donc la limite de $w_n$est $+\infty$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n - 1 = +\infty$

Partie C

On assigne à N la valeur 0 // Tant que 2×2^N-1<1000 / Augmenter N / Fin du tant que // Afficher N

Exercice 51P46

$u_n = \frac{3^n}{4^{n+1}}$

$v_n = \left(\sqrt{3}\right)^n$

$w_n = \frac{3\times 2^n - 1}{3}$

$t_n = (-3)(1-2^n)$

Déterminer la limite de