Devoir maison Toussaint

(Facultatif et à rendre pour le 3 novembre 2016)

Exercice 1

La bibliothèque municipale étant devenue trop petite, une commune a décidé d'ouvrir une médiathèque qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total. Pour l'ouverture prévue le 1er janvier 2013, la médiathèque dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancienne bibliothèque augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par la commune.

Partie A

Chaque année, la bibliothécaire est chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abimés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs. On appelle un le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année (2013+n). On donne $u_0 = 42$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0{,}95 + 6$.

2. On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel. Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

```
Variables : U, N
Initialisation :    Mettre 42 dans U
                    Mettre 0 dans N
Traitement :        Tant que U < 100
                        U prend la valeur U ×0,95+6
                        N prend la valeur N +1
                    Fin du Tant que
Sortie              Afficher N.
```

3. À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme.

Partie B

La commune doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus. On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année (2013+n).

1. Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.

2. On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0{,}95 + 4$ avec $v_0 = 42$. On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n, par $w_n = v_n - 80$. Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison q = 0,95 et préciser son premier terme w_0.

3. On admet que, pour tout entier naturel n : $w_n = -38 \times (0{,}95)^n$.

a. Déterminer la limite de (w_n) puis celle de (v_n).

b. Interpréter ce résultat.

Exercice 2

La population de l'Allemagne (nombre de personnes résidant sur le territoire allemand) s'élevait à 81 751 602 habitants au premier janvier 2011.

De plus, on sait qu'en 2011, le nombre de naissances en Allemagne ne compense pas le nombre de décès, et sans tenir compte des flux migratoires on estime le taux d'évolution de la population allemande à −0,22%. On admet que cette évolution reste constante les années suivantes. Les résultats seront arrondis à l'unité

Partie A

On propose l'algorithme suivant :

```
Entrée :  Saisir le nombre entier naturel non nul S.
Traitement :    Affecter à U la valeur 81 751 602    {initialisation}
                Affecter à N la valeur 0              {initialisation}
                Tant que U > S
                    Affecter à U la valeur 0,9978× U
                    Affecter à N la valeur N +1
                Fin tant que
Sortie :        Afficher N
```

On saisit en entrée le nombre S = 81200000.

Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on en sortie ?

U	81 751 602	81 571 748	...	
N	0		...	
Test U > S	Vrai		...	

Partie B

On note u_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2011+n.

1. Déterminer u_0 et u_1.

2. a. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique, de 1er terme 81 751 602 et de raison 0,997 8.

b. Exprimer u_n en fonction de n.

3. Si cette évolution de −0,22% se confirme :

a. Quel serait l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 ?

b. En quelle année la population passera-telle au-dessous du seuil de 81200000 habitants ?

Partie C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes. On admet de plus que le taux d'évolution de −0,22% ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. Modéliser cette situation à l'aide d'une suite (v_n) dont on précisera le premier terme v_0 ainsi qu'une relation entre v_{n+1} et v_n.

2. Calculer v_1 et v_2. Que peut-on conjecturer sur l'évolution de la population de l'Allemagne ?

(Données recueillies par l'Institut national d'études démographiques)

Correction de l'exercice 3 **Partie A**

1. u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1er janvier de l'année $(2013+n)$. Chaque année 5 % des ouvrages sont supprimés, il reste donc $\left(1-\dfrac{5}{100}\right)\times u_n = 0,95\times u_n$.
   Elle achète 6 000 ouvrages neufs soit 6 milliers donc le nombre d'ouvrages devient $0,95\times u_n+6$.
   Pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1}=0,95\times u_n+6}$.
2. Cet algorithme détermine le plus petit entier naturel N tel que $u_N > 100$.
3. On note $u_{26}\approx 99,445<100$ et $u_{27}\approx 100,473>100$ donc la valeur de N affichée est $\boxed{27}$.

Partie B

1. Il faut modifier la 8e ligne et l'algorithme devient :

```
Variables :
   U, N
Initialisation :
   Mettre 42 dans U
   Mettre 0 dans N
Traitement :
   Tant que U < 100
      U prend la valeur U × 0,95 + 4
      N prend la valeur N + 1
   Fin du Tant que
Sortie
Afficher N.
```

Remarque : même si la suite s'appelle v on peut conserver la lettre U.

2. Pour tout entier naturel n, $w_n = v_n - 80$ donc $v_n = w_n + 80$.
   $w_{n+1} = v_{n+1} - 80 = v_n\times 0,95+4-80 = (w_n+80)\times 0,95-76 = 0,95\,w_n+76-76$ donc $\boxed{w_{n+1}=0,95\,w_n}$.
   De plus $w_0 = v_0-80 = 42-80 = -38$, donc la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,95 et de premier terme $w_0=-38$.
3. (a) $0<0,95<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0}$.
   (b) Pour tout entier naturel n, $v_n = w_n+80$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 80}$.
   (c) Au bout d'un nombre assez grand d'années, le nombre d'ouvrages sera de 80 000. Notons que l'algorithme ci-dessus tourne sans fin puisque 100 est une valeur qu'on ne peut atteindre.

Partie A

	Valeur de U	Valeur de N	U > S
Initialisation	81 751 602	0	vrai
Boucle 1	81 571 748	1	vrai
Boucle 2	81 392 291	2	vrai
Boucle 3	81 213 228	3	vrai
Boucle 4	81 034 558	4	FAUX

On affiche à la sortie le nombre : 4

Partie B

On note U_n l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier $2011+n$.

1. $\boldsymbol{U_0 = 81\,751\,602}$ et $\boldsymbol{U_1 = 81\,571\,748}$ car **une diminution de 0,22% équivaut à multiplier par 0,9978**. On retrouve donc les valeurs du tableau de la partie A.

2. a. Manifestement $U_{n+1} = 0,9978\times U_n$ donc **on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre 0,9978**. Ce qui prouve que la suite est une suite géométrique, de 1er terme 81 751 602 et de raison 0,9978.

b. Comme la suite est géométrique, alors $\boldsymbol{U_n = 81\,751\,602\times 0,9978^n}$.

3. Si cette évolution de −0,22% se confirme :

a. l'effectif de la population de l'Allemagne au premier janvier 2035 (2011 +24 donne 2035) sera de $\boldsymbol{U_{24}\approx 77\,542\,583}$.

b. la population passera au-dessous du seuil de 81 200 000 habitants en $2011+4=\mathbf{2015}$.

Partie C

Dans cette partie, on tient compte des flux migratoires : on estime qu'en 2011, le solde migratoire (différence entre les entrées et les sorties du territoire) est positif en Allemagne et s'élève à 49 800 personnes. On admet de plus que le taux d'évolution de −0,22% ainsi que le solde migratoire restent constants les années suivant 2011.

1. $V_0 = 81\,751\,602$ et $V_{n+1} = 0,9978\times V_n + 49\,800$.

2. Calculer $V_1 = 81\,621\,548$ et $V_2 = 81\,491\,781$. On conjecturer que l'évolution de la population de l'Allemagne devrait s'orienter vers une diminution faible mais progressive.