Devoir Surveillé n°1 : suites

Exercice 1 (QCM)

2point par bonne réponse -1pt par réponse fausse
Aucune justification n'est demandée.

Les services de la mairie d'une ville ont étudié l'évolution de la population de cette ville. Chaque année, 12,5 % de la population quitte la ville et 1 200 personnes s'y installent.
En 2012, la ville comptait 40 000 habitants.
On note U_n le nombre d'habitants de la ville en l'année $2012 + n$.
On a donc $U_0 = 40000$.
On admet que la suite (U_n) est définie pour tout entier naturel n par $U_{n+1} = 0{,}875 \times U_n + 1200$. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 9600$.

1. La valeur de U_1 est :
   a. 6 200 b. 35 000 c. 36 200 d. 46 200
2. La suite (V_n) est :
   a. géométrique de raison −12,5% c. géométrique de raison −0,875
   b. géométrique de raison 0,875 d. arithmétique de raison −9600
3. La suite (U_n) a pour limite :
   a. $+\infty$ b. 0 c. 1200 d. 9600

On considère l'algorithme suivant :

```
INITIALISATION :    U prend la valeur 40 000
                    N prend la valeur 0
TRAITEMENT :        Tant que U > 10000
                        N prend la valeur N +1
                        U prend la valeur 0,875×U +1200
                    Fin du Tant que
SORTIE :            Afficher N
```

4. Cet algorithme permet d'obtenir :
   a. la valeur de $U_{40\,000}$ c. le plus petit rang n pour lequel on a $U_n \leq 10000$
   b. toutes les valeurs de U_0 à U_N d. le nombre de termes inférieurs à 1 200
5. La valeur affichée est :
   a. 33 b. 34 c. 9600 d. 9970,8

Exercice 2

Déterminer la valeur de $S = 3 - 15 + 75 - \cdots + 1\,171\,875$

Exercice 3

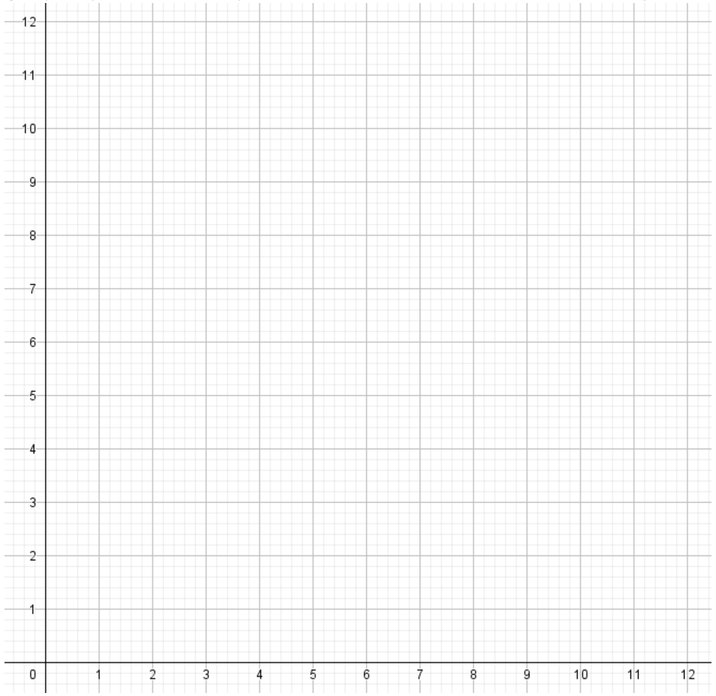
Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{11^{2n+2}}{5^{3n-4}}$

1) Prouver que la suite est géométrique, puis donner sa raison et son premier terme
2) Donner son expression par récurrence
3) Donner ses variations et sa limite.

Exercice 4

Soit (w_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 3 \end{cases}$

A l'aide de la droite d'équation $y = x$ et de la représentation graphique de la fonction f associant à tout réel x le réel $f(x) = \frac{1}{4}x + 3$ déterminer graphiquement les premiers termes de la suite et conjecturer la limite de (u_n)



Corrigé du Contrôle n°1

Exercice 1

1. $U_1 = 0{,}875U_0 + 1200 = 0{,}875 \times 40000 + 1200 = 36200$
donc $U_1 = 36200$. La bonne réponse est donc la réponse **c.**

2. On note que $U_n = V_n + 9600$. $V_{n+1} = U_{n+1} - 9600$
$= 0{,}875 \times U_n + 1200 - 9600 = 0{,}875 \times (V_n + 9600) - 8400 =$
$0{,}875 \times V_n + 8400 - 8400$ donc $V_{n+1} = 0{,}875 \times V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,875. La bonne réponse est la réponse **b.**
Le premier terme est donc $V_0 = U_0 - 9600 = 40000 - 9600 = 30400$

3. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n,
$V_n = 30400 \times 0{,}875^n$, or $U_n = V_n + 9600$ donc
$U_n = 30400 \times 0{,}875^n + 9600$. Notons que 0 < 0,875 < 1 donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}875^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9600$. La bonne réponse est la réponse **d.**

4. La bonne réponse est la réponse **c.**

5. $U_{32} = 30400 \times 0{,}87532 + 9600 \approx 10024 > 10000$ et
$U_{33} = 30400 \times 0{,}87533 + 9600 \approx 9971 < 10000$ donc la valeur affichée est la valeur de N égale à 33 . La bonne réponse est la réponse **a.**

Tiré du bac 2013 centre étranger

Exercice 2

$S = 3 - 15 + 75 - \cdots + 1\,171\,875$
$= 3 \times 1 + 3 \times (-5)^1 + 3 \times (-5)^2 + \cdots + 3 \times (-5)^8$
$= 3\frac{(-5)^9-1}{-5-1} = \frac{3(-5859375-1)}{-6} = 976\,563$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{11^{2n+2}}{5^{3n-4}}$

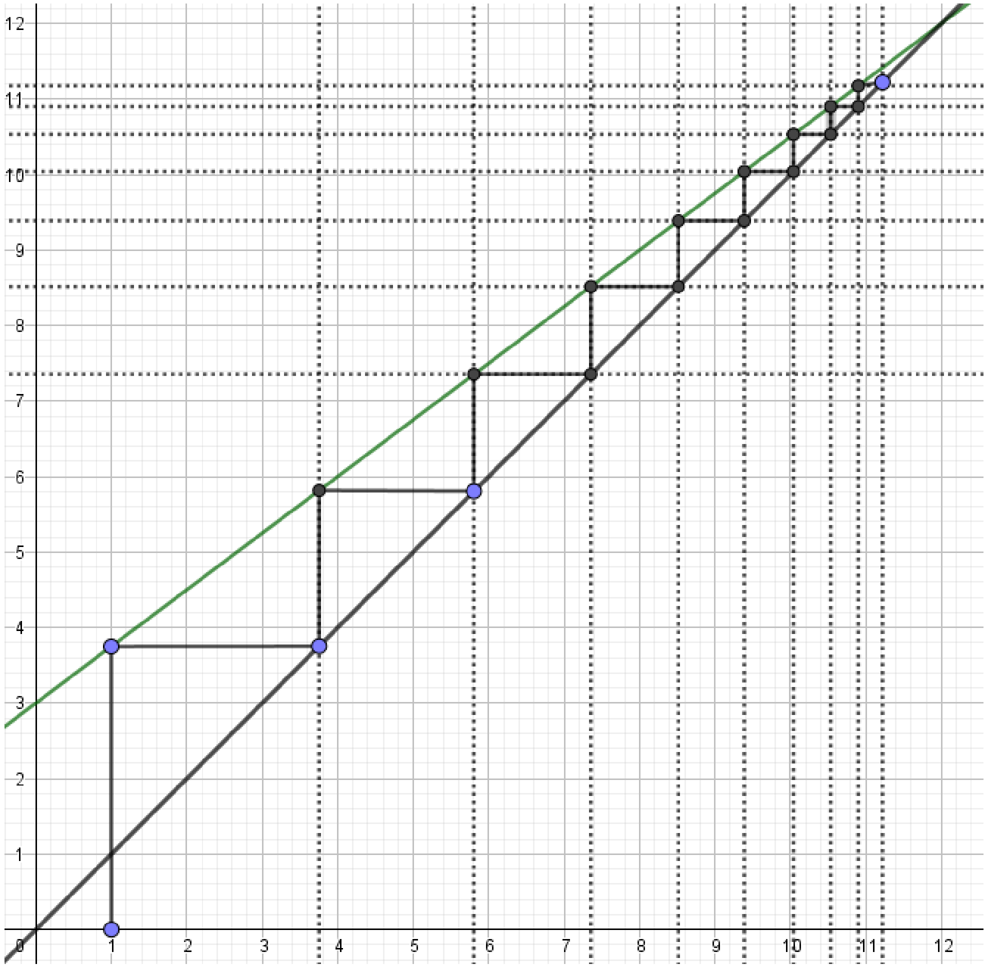
$u_n = \frac{11^{2n+2}}{5^{3n-4}} = \frac{11^{2n}11^2}{5^{3n}5^{-4}} = \frac{(11^2)^n}{(5^3)^n} \times \frac{11^2}{5^{-4}} = \left(\frac{11^2}{5^3}\right)^n (11^2 5^4) = \left(\frac{121}{125}\right)^n (75\,625)$

(u_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{121}{125}$ et de premier terme $u_0 = 75\,625$

Elle est définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 75\,625 \\ u_{n+1} = \frac{121}{125} u_n \end{cases}$

Le premier terme est positif et la raison $q \in [0; 1[$ donc elle est décroissante et sa limite est 0.

Exercice 4



On lit $u_1 \approx 3{,}8$ $\quad u_2 \approx 5{,}8$ $\quad u_3 \approx 7{,}4$ $\quad u_4 \approx 8{,}5$
La suite semble converger vers 12.

Corrigé du Contrôle n°1

Exercice 1

1. $U_1 = 0{,}875U_0 + 1200 = 0{,}875 \times 40000 + 1200 = 36200$
donc $U_1 = 36200$. La bonne réponse est donc la réponse **c.**

2. On note que $U_n = V_n + 9600$. $V_{n+1} = U_{n+1} - 9600$
$= 0{,}875 \times U_n + 1200 - 9600 = 0{,}875 \times (V_n + 9600) - 8400 =$
$0{,}875 \times V_n + 8400 - 8400$ donc $V_{n+1} = 0{,}875 \times V_n$ donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 0,875. La bonne réponse est la réponse **b.**
Le premier terme est donc $V_0 = U_0 - 9600 = 40000 - 9600 = 30400$

3. On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n,
$V_n = 30400 \times 0{,}875^n$, or $U_n = V_n + 9600$ donc
$U_n = 30400 \times 0{,}875^n + 9600$. Notons que 0 < 0,875 < 1 donc
$\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}875^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 9600$. La bonne réponse est la réponse **d.**

4. La bonne réponse est la réponse **c.**

5. $U_{32} = 30400 \times 0{,}87532 + 9600 \approx 10024 > 10000$ et
$U_{33} = 30400 \times 0{,}87533 + 9600 \approx 9971 < 10000$ donc la valeur affichée est la valeur de N égale à 33 . La bonne réponse est la réponse **a.**

Tiré du bac 2013 centre étranger

Exercice 2

$S = 3 - 15 + 75 - \cdots + 1\,171\,875$
$= 3 \times 1 + 3 \times (-5)^1 + 3 \times (-5)^2 + \cdots + 3 \times (-5)^8$
$= 3\frac{(-5)^9 - 1}{-5-1} = \frac{3(-5859375-1)}{-6} = 976\,563$

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{11^{2n+2}}{5^{3n-4}}$

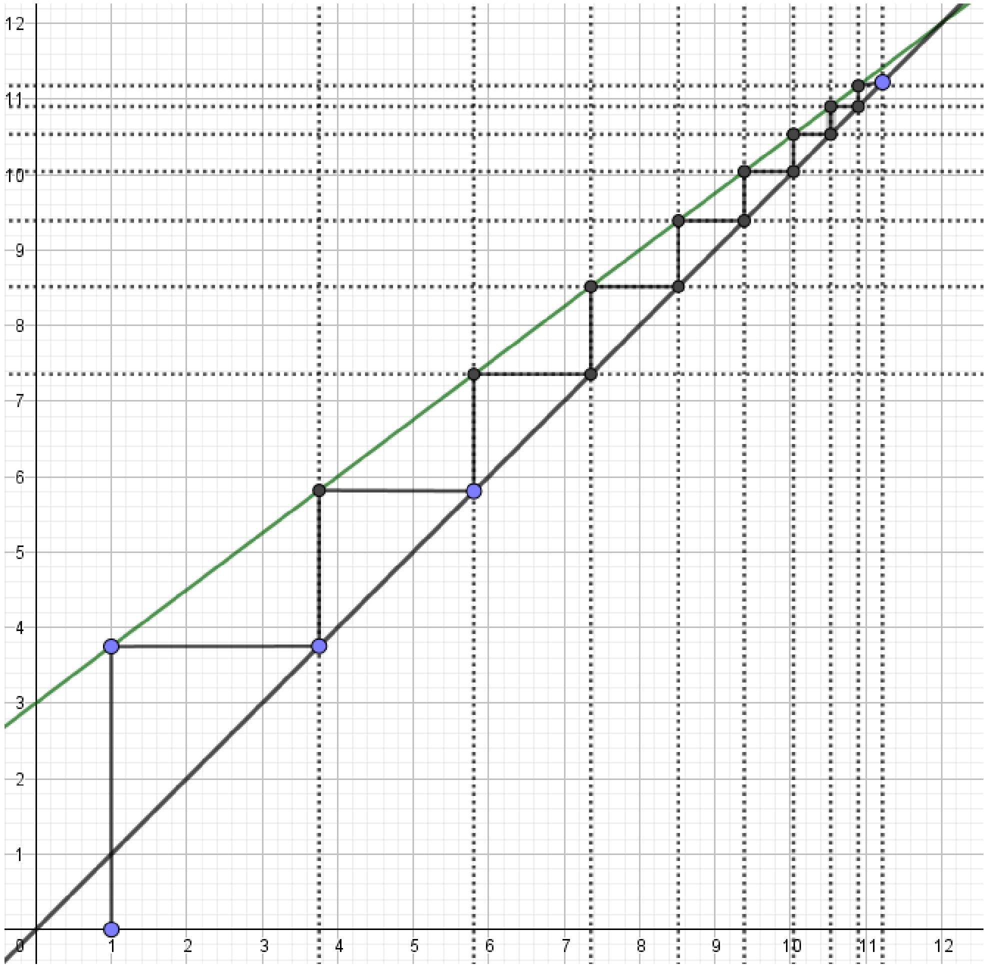
$u_n = \frac{11^{2n+2}}{5^{3n-4}} = \frac{11^{2n}11^2}{5^{3n}5^{-4}} = \frac{(11^2)^n}{(5^3)^n} \times \frac{11^2}{5^{-4}} = \left(\frac{11^2}{5^3}\right)^n (11^2 5^4) = \left(\frac{121}{125}\right)^n (75\,625)$

(u_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{121}{125}$ et de premier terme $u_0 = 75\,625$

Elle est définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0 = 75\,625 \\ u_{n+1} = \frac{121}{125} u_n \end{cases}$

Le premier terme est positif et la raison $q \in [0; 1[$ donc elle est décroissante et sa limite est 0.

Exercice 4



On lit $u_1 \approx 3{,}8$ $u_2 \approx 5{,}8$ $u_3 \approx 7{,}4$ $u_4 \approx 8{,}5$
La suite semble converger vers 12.