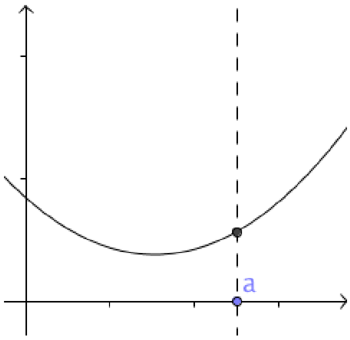
Etude de fonctions

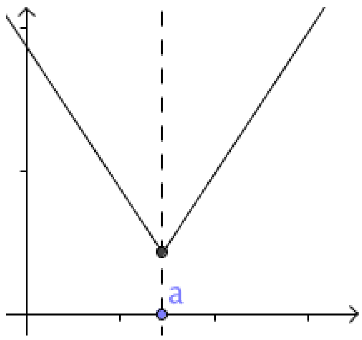
I. Continuité sur un intervalle

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si on peut tracer la courbe représentative de f sur I *"sans lever le crayon"*.

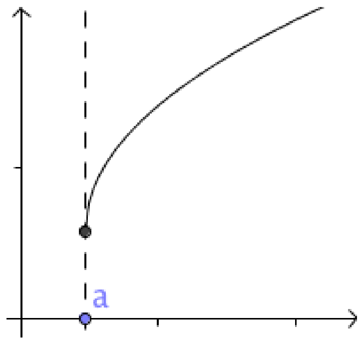
Exemples et contre-exemples :



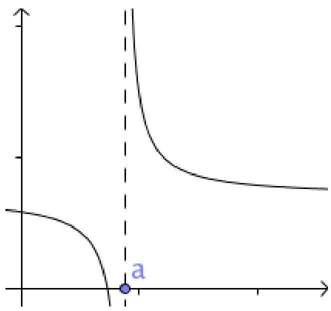
f est continue en a



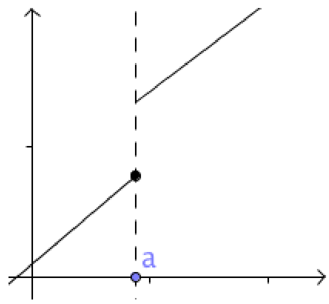
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

Propriétés :
1) Les fonctions $x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
2) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0;+\infty[$.
4) La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variations traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

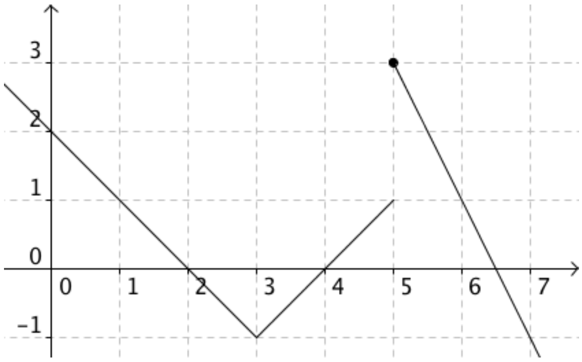
- Admis -

Méthode : Etudier la continuité d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = -x+2 & pour\ x < 3 \\ f(x) = x-4 & pour\ 3 \leq x < 5 \\ f(x) = -2x+13 & pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Traçons la courbe représentative de f



De toute évidence il y a un problème en 5, on peut conjecturer qu'elle sera continue sur $]-\infty;5[$ et sur $[5;+\infty[$ mais pas en 5

Il nous faut maintenant le prouver proprement

Les fonctions $x \mapsto -x+2$, $x \mapsto x-4$ et $x \mapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty;3[$, sur $[3;5[$ et sur $[5;+\infty[$.

Il y a deux points litigieux possibles en $x = 3$ et en $x = 5$

Pour passer sur la courbe représentative de f de la partie $]-\infty;3[$ à $[3;5[$ on n'a pas besoin de lever le crayon donc elle est continue en 3, par contre pour passer de la partie $[3;5[$ à celle couvrant $[5;+\infty[$ on est obligé de lever le crayon en $x = 5$ et donc elle n'est pas continue en 5.

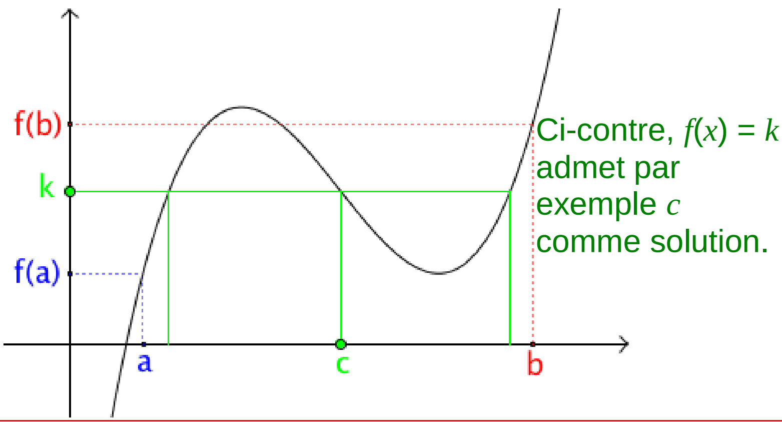
Conclusion : La fonction f est ainsi continue sur $]-\infty;5[$ et sur $[5;+\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$

III. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème :

On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

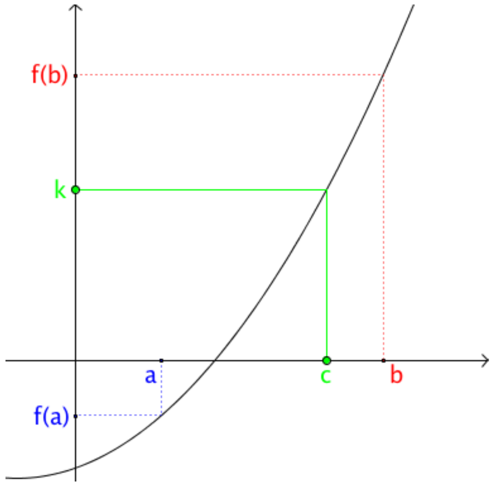


- Admis -

Remarque :

Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a ; b]$.

Corollaire :
On considère la fonction f définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a\,;\,b]$.

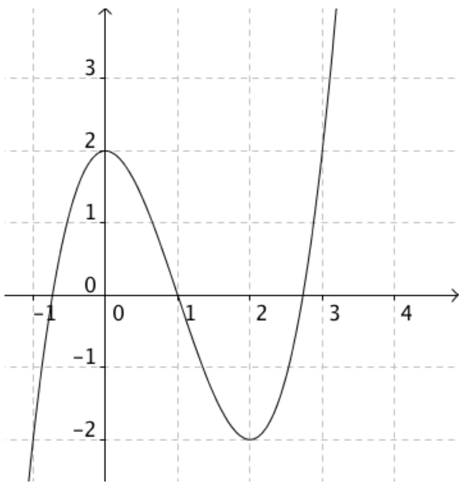


Méthode : Résolution approchée d'une équation

EXEMPLE 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.
1) Démontrer que $f'(x)=3x(x-2)$.
2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[2;3]$.
3) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2;3]$.
4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.
5) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[2;3]$.

On commence par tracer la fonction à l'aide de la calculatrice :



1) $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

2) Pour tout x de $[2;3]$, $f'(x)>0$.
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[2;3]$.

3) $f(2)=2^3-3\times2^2+2=-2<0$
$f(3)=3^3-3\times3^2+2=2>0$
La fonction f est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $[2;3]$ et elle **change de signe**.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel x tel que $f(x)=0$.

x	2	3
f	-2 ↗	2

2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que la solution de l'équation $f(x)=0$ est a telle que : $2,73<\alpha<2,74$.

5)

x	2		α		3
f		$-$	0	$+$	

EXEMPLE 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-4x^2+6$.

Démontrer que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution sur [-1 ; 4].

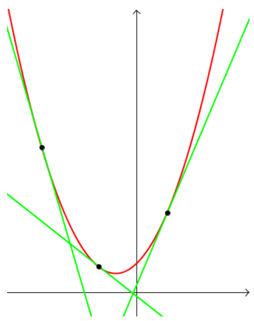
- f est continue sur [-1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(-1)=(-1)^3-4\times(-1)^2+6=1$ $\qquad f(4)=4^3-4\times4^2+6=6$

Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

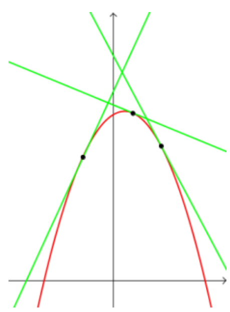
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x)=2$ admet au moins une solution sur [-1 ; 4].

IV. Fonction convexe et fonction concave

Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
La fonction f est concave sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

Propriétés :
- La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube $x \mapsto x^3$ est concave sur $\left]-\infty, 0\right]$ et convexe sur $\left[0;+\infty\right[$.
- La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $\left]-\infty;0\right[$ et convexe sur $\left]0;+\infty\right[$.
- La fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\left[0;+\infty\right[$.

- Admis -

Notation :
La dérivée d'une fonction dérivée f' se note f''.

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si sa dérivée f' est croissante sur I, soit

$f''(x) \geq 0$ pour tout x de I.

La fonction f est concave sur I si sa dérivée f' est décroissante sur I, soit

$f''(x) \leq 0$ pour tout x de I.

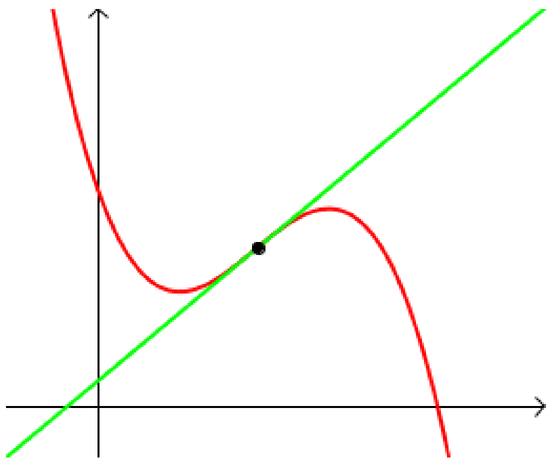
- Admis -

Méthode : Etudier la convexité d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$. Etudier la convexité de la fonction f.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f'(x) = x^2 - 18x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule en $x = 9$. Ainsi
Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$ et pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$ donc (la courbe représentative de f admet un point d'inflexion en $x = 9$ et) avant $x = 9$ elle est concave après celui-ci elle est convexe.

II. Point d'inflexion

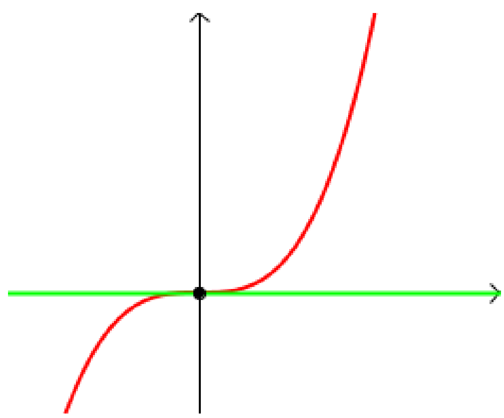


Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un point d'inflexion est un point où le courbe passe de convexe à concave ou vice versa

Pour trouver les points d'inflexions il nous faudra trouver les endroits ou la dérivée seconde change de signe.

Remarque importante :
Au point d'inflexion, la tangente traverse la courbe. La courbe est sous la tangente avant le point et au-dessus après ou vice versa.

Exemple : On considère la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.



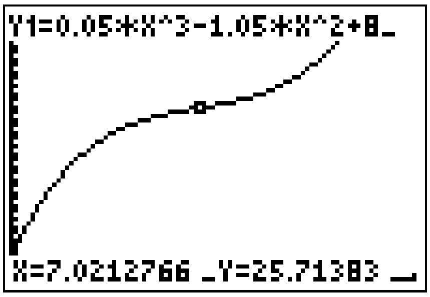
Dérivée deux fois elle nous donne $f''(x) = 6x$ fonction négative avant 0, nulle en 0 et positive après donc il y a bien un point d'inflexion en 0.

Visuellement : La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.
Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Méthode : Etudier la convexité pour résoudre un problème

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10000 par mois. Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x)=0,05x^3-1,05x^2+8x+4$.
1) À l'aide de la calculatrice graphique, évaluer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus.



1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle
[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x=7$.

2) $C(x)=0,05x^3-1,05x^2+8x+4$ $C'(x)=0,15x^2-2,1x+8$ $C''(x)=0,3x-2,1$

Or $0,3x-2,1=0$ pour $x=7$.
On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0		7		10
$C''(x)$		-	0	+	
$C'(x)$		↘		↗	
Convexité de C		concave		convexe	

$C(7)=25,7$.
Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication C s'accélère.
Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.