Fiche d'entrainement : corollaire du TVI

Soit f la fonction définie sur $[-4; 2{,}5]$ par $f(x) = 5x^3 + 9x^2 - 24x + 10$
Le but de l'exercice et de trouver une approximation des antécédents de 50 par la fonction f

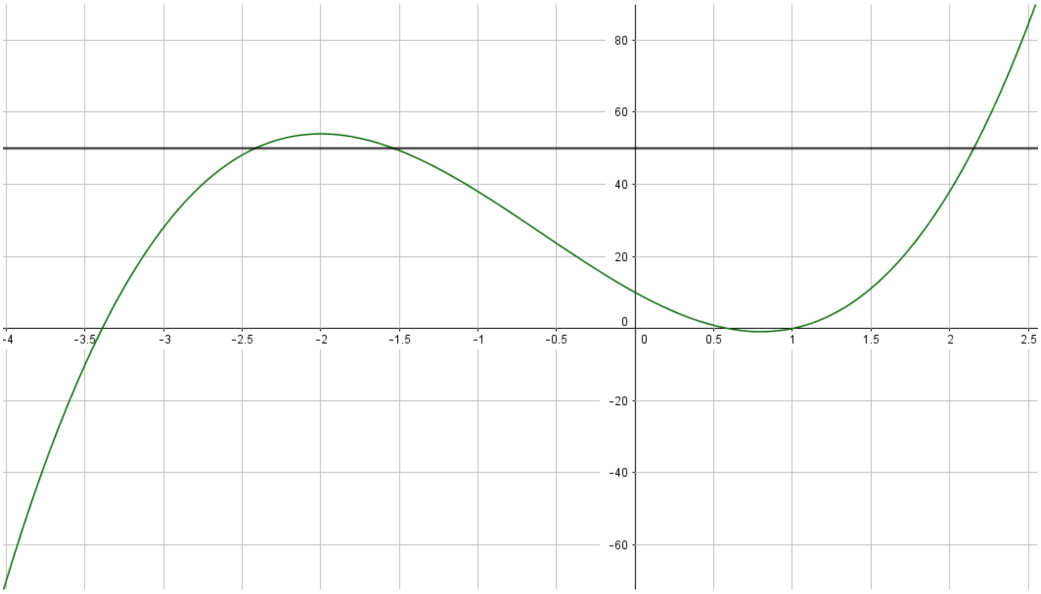
Partie 1 : Approche graphique
Tracer la courbe représentative de la fonction f sur votre calculatrice dans la fenêtre suivante : $Xmin = -4$, $X_{max} = 2{,}5$, $Y_{min} = -70$ et $Y_{\max} = 90$
Tracer la droite d'équation $y = 50$

1) Observer les points d'intersections entre la courbe et la droite, et conjecturer le nombre d'antécédent de 50 par f
2) Donner une approximation de ces antécédents par lecture graphique.

Partie 2 : approche algébrique

1) Donner la dérivée de la fonction f
2) En déduire les variations de f (on attend un tableau complet avec les valeurs au bout des flèches.
3) Prouver la conjecture faite à la question 1 de la partie 1
4) Donner **un encadrement à 10^{-3}** de la plus petite des racines, et à 10^{-2} pour les autres.

Correction



Partie 1

1) On a l'impression que 50 a trois antécédents parla fonction f
2) On a l'impression que ces antécédents valent approximativement : -2,4 ; -1,5 et 2,1

Partie 2

x	-4		-2		0,8		2,5
		+	0	-	0	+	
f(x)	-70	↗	54	↘	-0,88	↗	84,375

1) $f'(x) = 15x^2 + 18x - 24$
2) Etude du signe de $f'(x)$: $\Delta = 18^2 - 4 \times 15(-24) = 1764$, ici $\Delta > 0$ donc la dérivée aura deux racines : $x_1 = \frac{-18-\sqrt{1764}}{2\times 15} = -2$ et $x_2 = \frac{-18+\sqrt{1764}}{2\times 15} = 0{,}8$
3) . f est continue et strictment croissante sur [- 4;2], de plus $f(-4) < 50 < f(-2)$ donc d'après le corollaire du TVI 50 a exactement un antécédent sur $[-4; -2]$ par la fonction f
   f est continue et strictment décroissante sur [-2 ;0,8], de plus $f(-2) > 50 > f(-0{,}8)$ donc d'après le corollaire du TVI 50 a exactement un antécédent sur [-2 ;0,8] par la fonction f
   f est continue et strictment croissante sur [0,8 ;2,5], de plus $f(0{,}8) < 50 < f(2{,}5)$ donc d'après le corollaire du TVI 50 a exactement un antécédent sur [0,8 ;2,5] par la fonction f
   Ainsi 50 a exactement 3 antécédents sur $[-4; 2{,}5]$
4) $f(-2{,}5) < 50 < f(-2{,}4)$ donc $[-2{,}5; -2{,}4\,]$ est un bon encadrement à 10^{-1} de la même manière $[-2{,}42; -2{,}41]$ en est un à 10^{-2} et $[-2{,}417; -2{,}416]$
   De la même manière $[-1{,}54; -1{,}53]$ est un encadrement de la seconde et $[2{,}15; 2{,}16]$ en est un de la dernière.