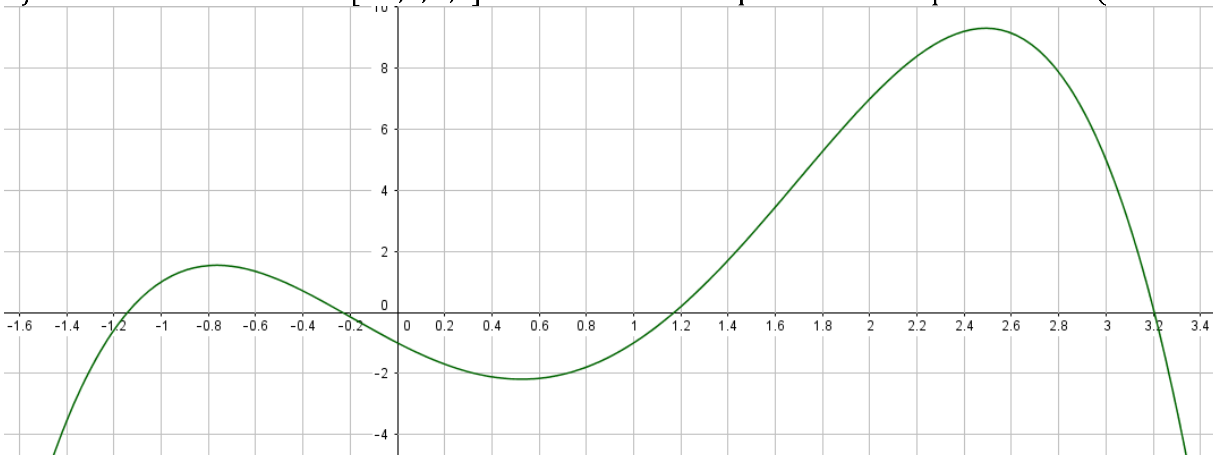
# **Fiche d'entrainement :** convexe et concave (par l'exemple)

**Approche graphique :**

Soit $f$ une fonction définie sur $[-1{,}5; 3{,}5]$ dont on ne connaît que la courbe représentative (ci-dessous)




1) Conjecturez le ou les intervalles sur lesquels la fonction est convexe et sur lesquels elle est concave.
2) Expliquez la propriété du cours que vous avez utilisé pour déterminer les intervalles.

**Approche algébrique :**

Il se trouve que la fonction précédente vérifie pour tout $x$ de l'intervalle $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1 - x^4$

3) Vérifiez ou infirmez proprement la conjecture de la question 1
4) Indiquez la propriété du cours utilisée implicitement pour justifier vos conclusions.
5) Complétez la phrase suivante : on dit que la fonction est concave sur I si et seulement si ….. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$…..

**Bonus :** fin de l'interrogation du jeudi 10 novembre

On avait $f$ la fonction définie sur $[-5; 7]$ par $(x) = -x^3 + 3x^2 + 24x - 5$ ,

dire quand est ce qu'elle est convexe et quand est ce qu'elle est concave

## Correction

**1) et 2)** avec ma règle je regarde quels sont les intervalles pour lesquels la courbe est localement (c'est-à-dire au voisinage du point de contact) au-dessus de ses tangentes, ici on a l'impression que $[-0{,}2; 1{,}6]$ convient on dira que $f$ est convexe sur cet intervalle

On regarde les intervalles pour lesquels la courbe est localement sous ses tangentes ici $[-1{,}5; -0{,}2]$ et $[1{,}6; 3{,}5]$ semblent convenir on dira qu'elle est concave sur ces intervalles.

**3)et 4)** $f(x) = -x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 4x - 1$ donc $f'(x) = -4x^3 + 9x^2 + 4x - 4$ et $f''(x) = -12x^2 + 18x + 4$

On étudie le signe de $f''(x)$ quand il est positif $f'$ est croissante et donc $f$ est convexe et quand il est négatif $f'$ est décroissante et donc $f$ est concave.

$\Delta = b^2 - 4ac = 18^2 - 4(-12)4 = 516$ ici $\Delta > 0$ donc on aura deux racines :

$x_1 = \frac{-18-\sqrt{516}}{2\times(-12)} \approx 1{,}696$et $x_2 = \frac{-18+\sqrt{516}}{2\times(-12)} \approx -0{,}196$ et on aura donc

| x | -1,5 | | $x_2$ | | $x_1$ | | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | - | 0 | + | 0 | - | |
| f'(x) | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |
| f(x) | | concave | | convexe | | concave | |

5) on dit que la fonction est concave sur I si et seulement si pour tous réels $a$ et $b$ de I on a $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}$

Remarque : cette réponse est déduite de la propriété du cours

**Bonus**

$f'(x) = -3x^2 + 6x + 24$ et donc $f''(x) = -6x + 6$

Etudions le signe de $f''(x)$

$-6x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 6x \Leftrightarrow 1 \geq x$ ainsi quand $x \leq 1$ la dérivée seconde est positive et donc la fonction est $f$ est convexe, et le reste du temps elle sera concave.