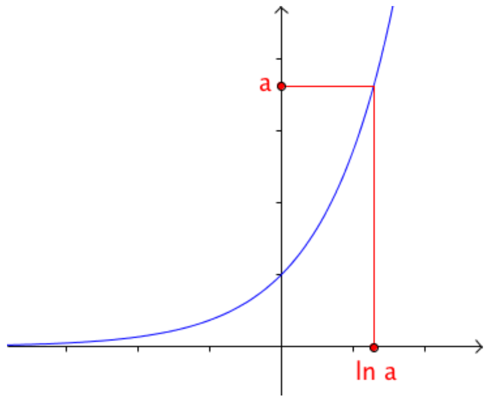
FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

I. Définition



La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$.

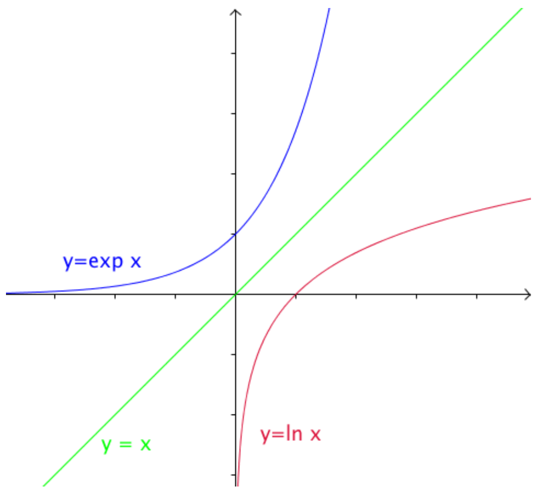
Pour tout réel a de $]0;+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

<u>Définition :</u> On appelle <u>logarithme népérien</u> d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.
La <u>fonction logarithme népérien</u>, notée **ln**, est la fonction :

$$\begin{aligned}\ln :]0;+\infty[&\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \ln x\end{aligned}$$

<u>Exemple :</u>
L'équation $e^x = 5$ admet une unique solution : Il s'agit de $x = \ln 5$.
A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $x \approx 1{,}61$.

<u>Remarque :</u>
Les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



<u>Conséquences :</u>
a) $x = e^a$ est équivalent à $a = \ln x$ avec $x > 0$

b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

c) Pour tout x, $\ln e^x = x$
d) Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$

<u>Démonstrations :</u>

a) Par définition b)- Car $e^0 = 1$ $e^1 = e$ et $e^{-1} = \frac{1}{e}$

c) Si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln y = \ln e^x$

d) Si on pose $y = \ln x$, alors $x = e^y = e^{\ln x}$

<u>Exemples :</u> $e^{\ln 2} = 2$ et $\ln e^4 = 4$

<u>Propriété :</u> Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$
b) $\ln x < \ln y \Leftrightarrow x < y$

Démonstration :

a) $x = y \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\ln y} \Leftrightarrow \ln x = \ln y$

b) $x < y \Leftrightarrow e^{\ln x} < e^{\ln y} \Leftrightarrow \ln x < \ln y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2$, $I =]0\,;+\infty[$

b) $e^{x+1} = 5$, $I = \mathbb{R}$

c) $3\ln x - 4 = 8$, $I =]0\,;+\infty[$

d) $\ln(6x-1) \geq 2$, $I = \left]\frac{1}{6}\,;+\infty\right[$

e) $e^x + 5 > 4e^x$, $I = \mathbb{R}$

a) $\ln x = 2$ $\Leftrightarrow \ln x = \ln e^2$ $\Leftrightarrow x = e^2$ La solution est e^2.

b) $e^{x+1} = 5$ $\Leftrightarrow e^{x+1} = e^{\ln 5}$ $\Leftrightarrow x + 1 = \ln 5$ $x = \ln 5 - 1$ La solution est $\ln 5 - 1$.

c) $3\ln x - 4 = 8$ $\Leftrightarrow 3\ln x = 12 \Leftrightarrow \ln x = 4 \Leftrightarrow \ln x = \ln(e^4) \Leftrightarrow x = e^4\ ^2$ La solution est e^4.

d) $\ln(6x-1) \geq 2$ $\Leftrightarrow \ln(6x-1) \geq \ln(e^2) \Leftrightarrow 6x - 1 \geq e^2 \Leftrightarrow x \geq \frac{e^2+1}{6}$ S= $\left[\frac{e^2+1}{6};+\infty\right[$.

e) $e^x + 5 > 4e^x$ $\Leftrightarrow e^x - 4e^x > -5 \Leftrightarrow -3e^x > -5 \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{3} \Leftrightarrow e^x < e^{\ln\left(\frac{5}{3}\right)} \Leftrightarrow x < \ln\left(\frac{5}{3}\right)$

L'ensemble solution est donc $\left]-\infty;\ln\left(\frac{5}{3}\right)\right[$.

II. Propriétés de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour réel x et y strictement positif, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Démonstration :

$e^{\ln(x \times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$

Donc $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit :
$log(36 \times 62) = log(36) + log(62) \approx 1{,}5563 + 1{,}7924$ (voir table ci-contre)
L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement : $log(36 \times 62) \approx 3{,}3487$
En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

2) Formules

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln\frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

d) $\ln(x^n) = n\ln x$ avec n entier relatif

Démonstrations :

a) $\ln\frac{1}{x}+\ln x=\ln\left(\frac{1}{x}\times x\right)=\ln 1=0$

b) $\ln\frac{x}{y}=\ln\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\ln x+\ln\frac{1}{y}=\ln x-\ln y$

c) $2\ln\sqrt{x}=\ln\sqrt{x}+\ln\sqrt{x}=\ln\left(\sqrt{x}\times\sqrt{x}\right)=\ln x$

d) $e^{n\ln x}=\left(e^{\ln x}\right)^n=x^n=e^{\ln\left(x^n\right)}$

Donc $n\ln x=\ln\left(x^n\right)$

Exemples :

a) $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$ b) $\ln\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 3-\ln 4$ c) $\ln\sqrt{5}=\frac{1}{2}\ln 5$ d) $\ln 64=\ln\left(8^2\right)=2\ln 8$

Méthode : Simplifier une expression

$A=\ln\left(3-\sqrt{5}\right)+\ln\left(3+\sqrt{5}\right)$ $B=3\ln 2+\ln 5-2\ln 3$ $C=\ln e^2-\ln\frac{2}{e}$

$A=\ln(3-\sqrt{5})+\ln(3+\sqrt{5})=\ln[(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})]=\ln\left[3^2-\sqrt{5}^2\right]=\ln(4)$

$B=3\ln 2+\ln 5-2\ln 3 \;=\ln 2^3+\ln 5-ln3^2=\ln\left(\frac{(2^3\times 5)}{3^2}\right)=\ln\left(\frac{40}{9}\right)$

$C=\ln e^2\;-\ln\frac{2}{e}=2-(\ln 2-\ln e)=2-\ln 2+1=3-\ln 2$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6^x=2$ 2) Résoudre dans $\left]0;+\infty\right[$ l'équation : $x^5=3$

3) 8 augmentations successives de *t* % correspondent à une augmentation globale de 30 %. Donner une valeur approchée de *t*.

1) $6^x=2 \Leftrightarrow \ln(6^x)=\ln 2 \Leftrightarrow x\ln(6)=\ln 2 \Leftrightarrow x=\frac{\ln 2}{\ln 6}$

2) Comme $x>0$, on a : $x^5=3 \Leftrightarrow \ln(x^5)=\ln 3 \Leftrightarrow 5\ln x=\ln 3 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{5}\ln 3 \Leftrightarrow \ln x=\ln 3^{\frac{1}{5}} \Leftrightarrow$

$x=3^{\frac{1}{5}}$ Remarque : $3^{\frac{1}{5}}$ se lit *"racine cinquième de 3"* et peut se noter $\sqrt[5]{3}$.

3) Le problème revient à résoudre dans $\left]0;+\infty\right[$ l'équation : $\left(1+\frac{t}{100}\right)^8=1,3$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\frac{t}{100}\right)^8\right)=\ln(1,3) \Leftrightarrow 8\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\ln(1,3) \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\frac{1}{8}\ln(1,3)$

$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{t}{100}\right)=\ln\left(1,3^{\frac{1}{8}}\right) \Leftrightarrow 1+\frac{t}{100}=1,3^{\frac{1}{8}} \Leftrightarrow t=100\left(1,3^{\frac{1}{8}}-1\right)$

Comme $100\left(1,3^{\frac{1}{8}}-1\right)\approx 3,3$

Une augmentation globale de 30 % correspond à 8 augmentations successives d'environ 3,3 %.

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.

- Admis -

<u>Propriété :</u> La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

<u>Démonstration :</u>
Nous admettons que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$.

Posons $f(x) = e^{\ln x}$. Alors $f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x} = x(\ln x)'$

Comme $f(x) = x$, on a $f'(x) = 1$. Donc $x(\ln x)' = 1$ et donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

<u>Exemple :</u>

Dériver la fonction suivante sur l'intervalle $\left]0;+\infty\right[$: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

2) <u>Variations</u>

<u>Propriété :</u> La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\left]0;+\infty\right[$.

<u>Démonstration :</u>

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$.

3) <u>Convexité</u>

<u>Propriété :</u> La fonction logarithme népérien est concave sur $\left]0;+\infty\right[$.

<u>Démonstration :</u>

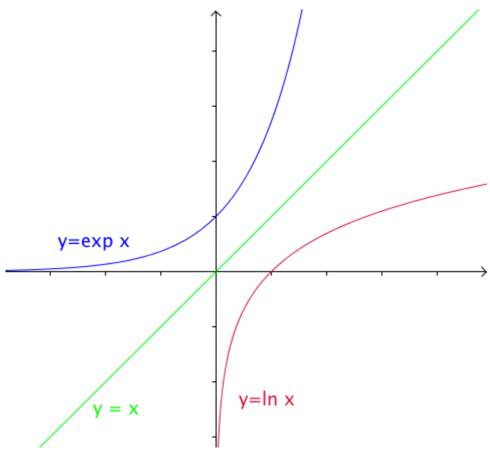
Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

$(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc la dérivée de la fonction ln est strictement décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ et donc la fonction logarithme népérien est concave sur cet intervalle.

4) <u>Limites aux bornes</u>

<u>Propriété :</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$

On peut justifier ces résultats par symétrie de la courbe représentative de la fonction exponentielle.



5) Tangentes particulières

Rappel :
Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

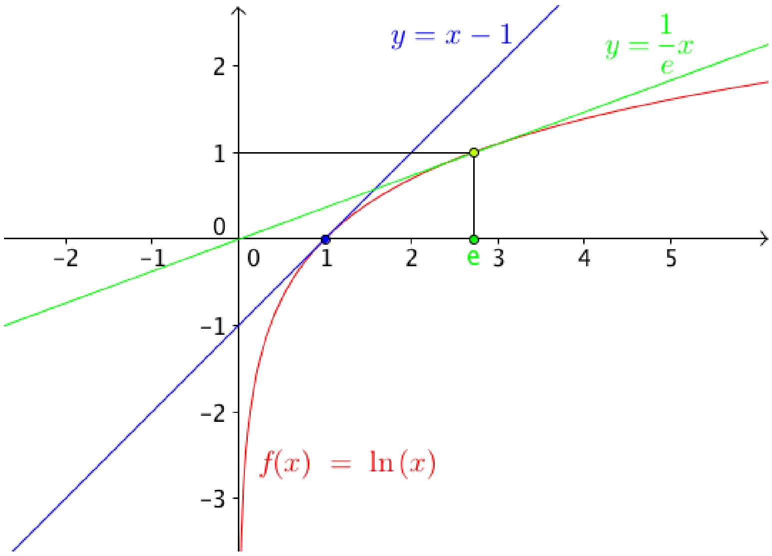
Dans le cas de la fonction logarithme népérien, l'équation est de la forme : $y = \frac{1}{a}(x-a) + \ln(a)$

- Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{1}(x-1) + \ln(1)$ soit : $y = x - 1$.
- Au point d'abscisse e, l'équation de la tangente est $y = \frac{1}{e}(x-e) + \ln e$ soit : $y = \frac{1}{e}x$.

6) Courbe représentative

On dresse le tableau de variations de la fonction logarithme népérien :
Valeurs particulières : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



Méthode : Etudier les variations d'une fonction

1) Déterminer les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln x$.
2) Etudier la convexité de la fonction f.

1) Sur $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = -1 + \frac{2}{x} = \frac{2-x}{x}$. Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2 - x$.
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0;2]$ et strictement décroissante sur $[2;+\infty[$.

On dresse le tableau de variations :

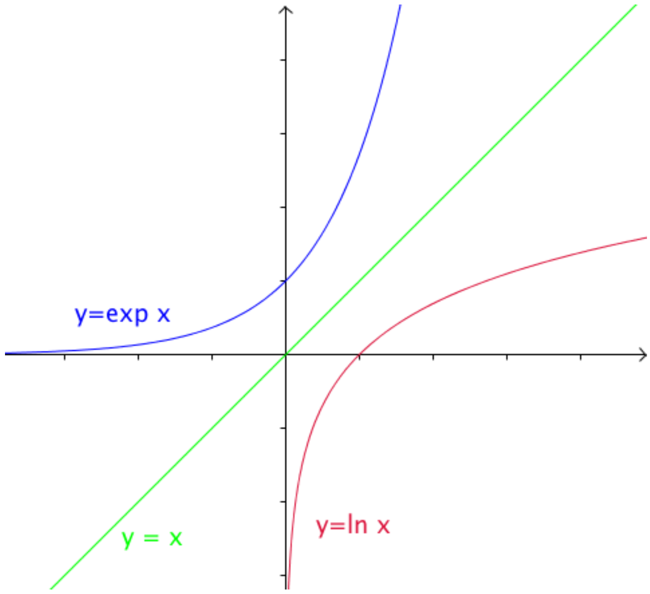
$f(2) = 3 - 2 + 2\ln 2 = 1 + 2\ln 2$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	-	
$f(x)$	‖	↗	$1+2\ln 2$	↘	

2) Sur $]0;+\infty[$, on a $f''(x) = \frac{-1\times x - (2-x)\times 1}{x^2} = \frac{-x-2+x}{x^2} = -\frac{2}{x^2} < 0$.
La fonction f' est donc décroissante sur $]0;+\infty[$. On en déduit que la fonction f est concave sur $]0;+\infty[$.

IV. Positions relatives

Propriété : La courbe représentative de la fonction exponentielle est au-dessus de la droite d'équation $y = x$.
La droite d'équation $y = x$ est au-dessus de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.



Démonstration :

- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

$f'(x) = e^x - 1$. $\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$

On a également $f(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$.
On dresse ainsi le tableau de variations :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	1	↗	

On en déduit que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $f(x) = e^x - x > 0$ soit $e^x > x$

- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

Comme $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.
On a également $g(1) = 1 - \ln 1 = 1 > 0$.
On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	‖	↘	1	↗	

On en déduit que pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $g(x) = x - \ln x > 0$ soit $x > \ln x$.