# Correction du DM facultatif

**Exercice 102 P56**

**Partie 1**

1)

| | Janvier 2012 | Février 2012 | Mars 2012 |
|---|---|---|---|
| Rand du mois | 0 | 1 | 2 |
| Recette | 2300 | 2323 | 2346,23 |
| coûts | 800 | 820 | 840,5 |
| Bénéfice | 1500 | 1503 | 1505.73 |

2a) $R_n$ et $C_n$ sont des suites géométriques de raison respectives $1+\frac{1}{100}$ et $1+\frac{2,5}{100}$ et de premier terme respectif $R_0 = 2300$ et $C_0 = 800$ on a donc $R_n = R_0 q^n = 2300 \times 1,01^n$ et $C_n = 800 \times 1,025^n$

b) $B_n = R_n - C_n = 2300 \times 1,01^n - 800 \times 1,025^n$

3a) $B_n = 2300 \times 1,01^n - 800 \times 1,025^n$ donc $B_{n+1} = 2300 \times 1,01^{n+1} - 800 \times 1,025^{n+1}$ et ainsi

$B_{n+1} - B_n = 2300 \times 1,01^{n+1} - 800 \times 1,025^{n+1} - (2300 \times 1,01^n - 800 \times 1,025^n)$

$= 2300 \times (1,01^{n+1} - 1,01^n) - 800(1,025^{n+1} - 1,025^n)$

$= 2300 \times 1,01^n(1,01-1) - 800 \times 1,025^n(1,025-1) = 23 \times 1,01^n - 20 \times 1,025^n$

b) $23 \times 1,01^n - 20 \times 1,025^n > 0 \Leftrightarrow 23 \times 1,01^n > 20 \times 1,025^n \Leftrightarrow 1,01^n > \frac{20}{23} \times 1,025^n$

$\Leftrightarrow \frac{1,01^n}{1,025^n} > \frac{20}{23} \Leftrightarrow \left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n > \frac{20}{23}$

c) $\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1,01}{1,025} \approx 0,99$ donc comprise strictement entre -1 et 1 , de plus cette suite est de premier terme positif valant 1 donc sa limite sera 0.

Ça veut dire que plus $n$ est grand plus $\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n$ se rapproche de 0 donc au bout d'un moment on n'aura plus avoir $\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n > \frac{20}{23}$ donc on n'aura plus $B_{n+1} - B_n > 0$ donc on n'a plus $B_{n+1} > B_n$ la suite sera donc décroissante.

4)

| **algorithme** | **TI** | **Casio** |
|---|---|---|
| On assigne à N la valeur 0 | $0 \rightarrow N$ | $0 \rightarrow N$ |
| Tant que $\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n > \frac{20}{23}$ | While (1,01/1,025)^N>20/23 | While (1,01/1,025)^N>20/23 |
| Augmenter N | $N+1 \rightarrow N$ | $N+1 \rightarrow N$ |
| Fin du tant que | End | EndWhile |
| Afficher N | Disp N | N |

**Partie B**

1)

$1,025^n\left(2300 \times \frac{1,01^n}{1,025^n} - 800\right) = 2300 \times \frac{1,01^n}{1,025^n} 1,025^n - 800 \times 1,025^n = 2300 \times 1,01^n - 800 \times 1,025^n = B_n$

2) $1,025^n$ est une suite géométrique de raison plus grande que 1 valant ici 1,025 et de premier terme positif valant 1 donc $\lim_{n\to+\infty} 1,025^n = +\infty$

On a montré à la question 3c) que $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2300\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} 2300\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n - 800 = -800$

b) $\lim_{n\to+\infty} 1,025^n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 2300\left(\frac{1,01}{1,025}\right)^n - 800 = -800$ et donc par produit $\lim_{n\to+\infty} B_n = -\infty$ ce qui veut dire que le bénéfice passera à un moment ou a un autre sous 0 et y restera donc l'artisan se retrouvera en déficit à un moment ou a un autre pour y rester.

3)

| algorithme | TI | Casio |
|---|---|---|
| On assigne à N la valeur 0 | $0 \rightarrow N$ | $0 \rightarrow N$ |
| Tant que $2300 \times 1,01^n$ $-800 \times 1,025^n > 0$ | While 2300×1,01^N-800×1,025^N >0 | While 2300×1,01^N-800×1,025^N >0 |
| Augmenter N | $N+1 \rightarrow N$ | $N+1 \rightarrow N$ |
| Fin du tant que | End | EndWhile |
| Afficher N | Disp N | N |

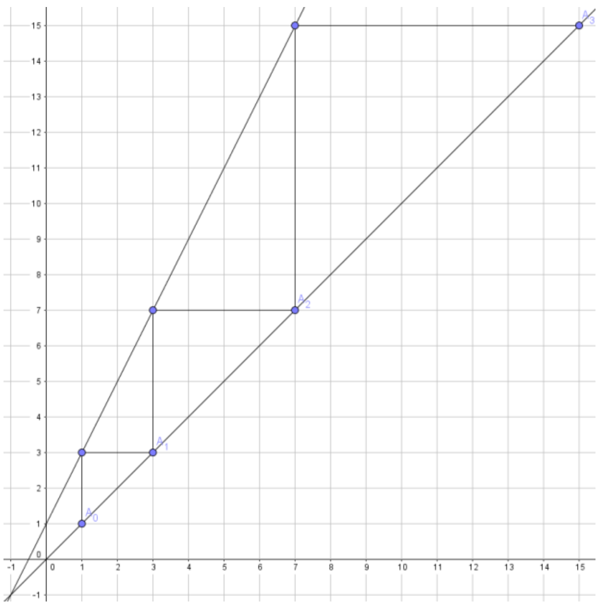
**Partie C**

1) $SR_n = R_0 + R_1 + \cdots + R_n = R_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2300\frac{1-1,01^{n+1}}{1-1,01}$
2) $SC_n = C_0 + C_1 + \cdots + C_n = C_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 800\frac{1-1,025^{n+1}}{1-1,025}$
3) $SB_n = SR_n - SC_n = 2300\frac{1-1,01^{n+1}}{1-1,01} - 800\frac{1-1,025^{n+1}}{1-1,025}$

4) La première année le bénéfice total correspondra à la somme des 12 premiers bénéfices soit
$SB_{12} = 2300\frac{1-1{,}01^{13}}{1-1{,}01} - 800\frac{1-1{,}025^{13}}{1-1{,}025} \approx 19649{,}10$

**103P56**
1)a) **Méthode 1** :
je vais prouver que l'écart entre deux terme consécutifs de la suite est une constant.
$v_{n+1} - v_n = (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - u_{n+1} - u_{n+1} + u_n$
$= \frac{(n+2)((n+2)+1)}{2} - 2\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}\big((n+2)(n+3) - 2(n+1)(n+2) + n(n+1)\big)$
$= \frac{1}{2}(n^2 + 5n + 6 - (2n^2 + 6n + 4) + n^2 + n\ )) = \frac{1}{2}(2n^2 + 6n + 6 - 2n^2 - 6n - 4) = \frac{1}{2}2 = 1$ donc on passe d'un terme au suivant en ajoutant 1.
**Méthode 2**
**Rappel :** si une suite $(u_n)$ a son écriture en fonction de $n$ sous la forme $u_n = an + b$ alors elle est de raison $a$ et de premier terme $u_0 = b$
$v_n = u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)-n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)[(n+2)-n]}{2} = \frac{(n+1)2}{2} = 1n + 1$
D'après le cours de 1ES la suite est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = 1$
b) voir méthode 2 : $v_n = 1n + 1$
2) a) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = (u_1 - u_0) + (u_2 - u_1) + \cdots + (u_n - u_{n-1})$
$= u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + \cdots + u_n - u_{n-1}$ il y a beaucoup d'annulation $S_n = u_n - u_0$
b) $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1} = 1 + 2 + \cdots + n$ (on a utilisé la formule du 1b) )
de plus $S_n = u_n - u_0 = \frac{n(n+1)}{2} - 0 = \frac{n(n+1)}{2}$ ainsi $1 + 2 + \cdots + n\ = \frac{n(n+1)}{2}$
3a) on veut $0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$ donc j'utilise $\frac{n(n+1)}{2}$ avec $n$ qui vaut 100
$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$
b) $0 + 2 + 4 + 6 + .. + 98 = 2(0 + 1 + 2 + 3 + 49) = 2\left(\frac{49(49+1)}{2}\right) = 2450$
à mon avis il y a une erreur d'énoncé, ça serait plus intéressant de demander les entiers inférieurs ou égaux à 100 : $0 + 2 + 4 + 6 + .. + 100 = 2(0 + 1 + 2 + 3 + 50) = 2\left(\frac{50(50+1)}{2}\right) = 2550$
c)$X = 1 + 3 + 5 + \cdots + 99$ en fait si on ajoute cette somme à celle que la question 3b et à 100 on a la somme de tous les entiers allant de 0 à 100 et donc X+2450+100=5050 ⇔ $X = 5050 - 2450 - 100$ ⇔ $X = 2500$

**Exercice 104P57**
**Partie A**



a)b) $u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 7$ et $u_3 = 15$
c) les droites dessinées sont d'équation $y = x$ et $y = 2x + 1$ donc la relation entre deux termes consécutifs sera donnée par $u_{n+1} = 2u_n + 1$
d) la suite semble croissante et avoir pour limite $+\infty$

**Partie B**
a) Pour montrer que $(w_n)$ est géométrique on va exprimer $w_{n+1}$ en fonction de $w_n$ on utilisera $w_n = v_n + 1$ et $v_{n+1} = 2v_n + 1$
$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = (2v_n + 1) + 1 = 2v_n + 2$ or $w_n = v_n + 1$ et $v_n = w_n - 1$ et donc $w_{n+1} = 2v_n + 2 = 2(w_n - 1) + 2 = 2w_n - 2 + 2 = 2w_n$
Ainsi $w_{n+1} = 2w_n$ de plus $w_0 = v_0 + 1 = 2$ donc $(w_n)$ est la suite géométrique de raison 2 et de premier terme 2
b) … et donc $w_n = w_0 \times q^n = 2 \times 2^n$ et donc $v_n = w_n - 1 = 2 \times 2^n - 1$
c) on a une suite géométrique de premier terme positif et de raison plus grande que 1 donc la limite de $w_n$est $+\infty$ et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} w_n - 1 = +\infty$

**Partie C**
On assigne à N la valeur 0 // Tant que 2×2^N-1<1000 / Augmenter N / Fin du tant que // Afficher N