Corrections d'exercices du livre Dimathème Tsti chapitre : complexes P45 et suivantes
Page 1 : 91, 96 , 98 et 104 Page 2 : 106, 115, 116, 117 et 119 page 3 : 121, 122 et 123

Exercice 91 P 45

a)

On pose z = x + iy

|z-2-3i| = |x-2 +i(y-3)| = $\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$

|z-2-3i|=2 ⇔ |z-2-3i²|=4

⇔ $(x-2)^2+(y-3)^2 = 4$ ce qui correspond à un cercle de centre (2 ;3) et de rayon 2

⇔ x^2 -4x +4 + y^2 -6y +9 = 4

⇔ x^2 -4x + y^2 -6y +9 =0

b)

|z-2-3i| = |z-z_A| =| $z_{\overrightarrow{AM}}$|=‖$\overrightarrow{AM}$‖ donc |z-2-3i| =2 ⇔ ‖$\overrightarrow{AM}$‖=2

Les points M solution de cette équation sont les points situés à une distance de 2 du point A, c'est-à-dire le cercle de centre A et de rayon 2.

Exercice 96 P46

1) $\underline{T}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} = \frac{(1-j\omega)}{(1+j\omega)(1-j\omega)} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2}$

2) $\underline{T}(0) = \frac{1-j0}{1+0^2} = 1$

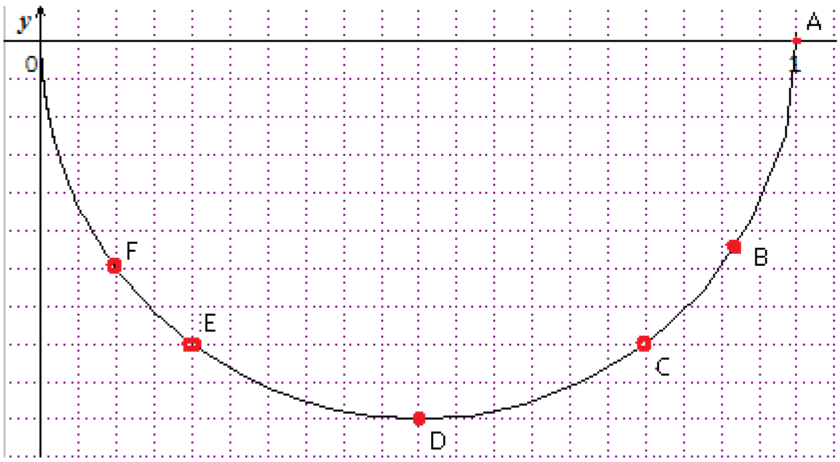
$\underline{T}(0{,}3) = \frac{1-j0{,}3}{1+0{,}3^2} = \frac{1-j0{,}3}{1{,}09}$

$\underline{T}(0{,}5) = \frac{1-0{,}5j}{1+0{,}5^2} = \frac{1}{1{,}25} - j\frac{0{,}5}{1{,}25}$=0,8-0,4j

$\underline{T}(1) = \frac{1-j1}{1+1^2} = 0{,}5 - 0{,}5j$

$\underline{T}(2) = \frac{1-j2}{1+2^2} = \frac{1-2j}{5} = 0{,}2 - 0{,}4j$

$\underline{T}(\omega) = \frac{1-j3}{1+3^2} = 0{,}1 - 0{,}3j$



Si ω est positif ou nul $\underline{T}(\omega)$ a une partie réelle $\frac{1}{1+\omega^2}$ positive et a une partie imaginaire $\frac{-j\omega}{1+\omega^2}$négative ou nulle donc les points correspondants sont dans le quatrième cadrant.

Soit I le milieu de [OI], z_I=0,5

Ainsi $z_{\overrightarrow{IM}} = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} - 0{,}5 = \frac{1-j\omega}{1+\omega^2} - \frac{0{,}5+0{,}5\omega^2}{1+\omega^2} = \frac{0{,}5(1-\omega^2)-j\omega}{1+\omega^2}$

$|z_{\overrightarrow{IM}}| = \sqrt{\left(\frac{0{,}5(1-\omega^2)}{1+\omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-\omega}{1+\omega^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{0{,}25-0{,}5\omega^2+0{,}25\omega^4+\omega^2}{(1+\omega^2)^2}}$

$= \sqrt{\frac{0{,}25+0{,}5\omega^2+0{,}25\omega^4}{(1+\omega^2)^2}} = \sqrt{\frac{0{,}25(1+\omega^2)^2}{(1+\omega^2)^2}} = \sqrt{0{,}25} = 0{,}5$ donc les points M sont sur le cercle de centre I et de rayon 0,5

Or les points M doivent être dans le quatrième quadrant, ils sont donc bien dans le demi cercle inférieur de diamètre [OA]

4) ce sont des points dont la partie réelle de l'affixe vaut toujours 1 et dont la partie imaginaire est comprise entre -∞ et 0. Il s'agit donc d'une partie de la droite d'équation x = 1, celle qui est dans le quatrième quadrant.

Exercice 98 P47

a) z^2 -3z + 4 = 0 $\Delta = 9 - 16 = -7$ $z_1 = \frac{3-i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{3+i\sqrt{7}}{2}$

b) z^2 + z +2,5 = 0 $\Delta = 1 - 10 = -9$ $z_1 = \frac{-1-i3}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+i3}{2}$

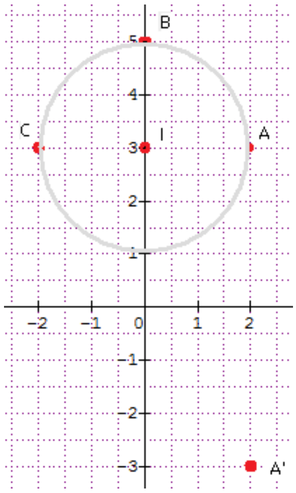
Exercice 104 P 47

On pose z = x+iy avec x et y deux réels

a) $z^2 - \bar{z}$ +1 = 0 ⇔ x^2 +i2xy - y^2 - x + iy +1 = 0 la partie imaginaire et la partie réelle du membre de gauche doivent être toutes les deux nulles. $\begin{cases} x^2 - y^2 - x + 1 = 0 \\ +2xy + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x + 1 = 0 \\ (2x+1)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x + 1 = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \text{ ou } y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} + 1 = 0 \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 + 0 - x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{7}{4} \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 - x + 1 = 0 \quad \Delta = -3\ (< 0) \\ y = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{7}}{2}\ ou - \frac{\sqrt{7}}{2} \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$ L'équation a donc deux solutions $z_1 = \frac{-1-i\sqrt{7}}{2}$ et $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}$



Exercice 106 P47

a) z²-4z+13 = 0 $\Delta = 16 - 52 = -36$ $z_1 = \frac{4+i6}{2} = 2 + 3i$ et $z_2 = \frac{4-i6}{2} = 2 - 3i$

$z_3 = iz_1 + 3(1+i) = i(2+3i) + 3 + 3i = 5i$

b)

c) AO = $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

Soit I le milieu de [AC], $z_I = \frac{z_1 + (-z_2)}{2} = \frac{2+3i-2+3i}{2} = 3i$ AI=$|z_1 - z_I| = |2| = 2$

Le cercle de diamètre [AC] est aussi le cercle de centre I et de rayon AI =2

IB = $|z_3 - z_I|$ =|5i-3i|=|2i|= 2 et donc B est sur le bon cercle.

Exercice 115 P 49

1) f(z) = z +(1-2i) et si l'on pose $\vec{w} = 1\vec{u} - 2\vec{v}$ on a f(z) = z + $z_{\vec{w}}$ et donc f correspond à la translation de vecteur $\vec{w}$

2) la droite d'équation y = 3x + 4 passe par A(0 ;4) et par B(-2 ;-2) donc son image par F sera la droite parallèle passant par A'(1; 2) et B'(-1;-4) images respectives de A et B par F. Comme elle est parallèle je sais que son coefficient directeur sera aussi 3.

Reste à déterminer m' son ordonnée à l'origine, la droite passant par A' on aura 2 = 3 × 1 + m' donc m' = -1

Notre droite d'équation y = 3x + 4 aura donc pour image la droite d'équation y = 3x – 1

3)

L'image d'un cercle par une translation est un cercle de même rayon et dont le centre est l'image par la translation du cercle de départ.

Le cercle d'équation (x-2)² + (y-3)² = 16 est le cercle de centre C(2 ;3) et de rayon $\sqrt{16} = 4$ F(C)= C'(3 ;1)

Donc l'image du cercle par la translation sera le cercle d'équation (x-3)²+(y-1)²=16

Exercice 116 P 49

C'est la fonction qui a tout complexe z associe le complexe $ze^{i\frac{2\pi}{3}}$

Exercice 117 P 49

$(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \arg(z_{\overrightarrow{OB}}) - arg(z_{\overrightarrow{OA}}) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}}\right) = arg\left(\frac{b}{a}\right) = arg\left(\frac{1-3i}{2-i}\right);$

$\frac{1-3i}{2-i} = \frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{2+i-6i+3}{2^2+1} = \frac{5-5i}{5} = 1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

Donc $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}) = \frac{3\pi}{4}$

Exercice 119 P49

1) f(z) = $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}z = e^{\frac{2\pi}{3}}z$ nous avons donc à faire à une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2) l'axe des ordonnées est une droite passant par O le centre de la rotation (et donc seul point invariant pour cette transformation), donc son image par la rotation sera une droite passant par O, donc on peut voir cette droite comme une courbe représentative d'une fonction linéaire f(x) = mx.

Un point d'affixe z = i aura pour image un point d'affixe $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}i = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ et donc de coordonnées $\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; \frac{-1}{2}\right)$ on a donc : f($\frac{-\sqrt{3}}{2}$)= $\frac{-1}{2}$ et donc $\frac{-\sqrt{3}}{2}m = \frac{-1}{2}$ et donc m = $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ainsi l'image par F de l'axe des ordonnées sera une droite d'équation f(x) = $\frac{\sqrt{3}}{3}x$

Exercice 121 P49

1) Il peut sembler un peu dur de placer sur le plan les points A et B vu leurs affixes (si on ne veut pas utiliser de valeur approchée de 1 +$\sqrt{2}$), en fait il suffit de garder en tête qu'un carré de côté une unité a une diagonale de longueur $\sqrt{2}$ unités. Pour placer A et B je peux reporter cette longueur avec un compas à partir des points respectivement d'affixe 1 + i et 1 – i

2) on peut remarquer que $z_B = \overline{z_A}$ donc OB = $|z_B| = |\overline{z_A}|$= OA

3) $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B}{\overline{z_B}} = \frac{z_B \times z_B}{\overline{z_B} \times z_B} = \frac{{z_B}^2}{|z_B|^2} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 - 2i(1+\sqrt{2}) + (-i)^2}{(1+\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \frac{2+2\sqrt{2} - i2(1+\sqrt{2})}{4+2\sqrt{2}}$

$= \frac{(1+\sqrt{2}) - i(1+\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} = \frac{(1-i)(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}} = (1-i)\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

4) on a donc $z_B = z_A e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Donc B est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

Exercice 122 P49

1) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

$z_2 = {z_1}^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

2) a) Soit z_0= (-$\sqrt{3}$-2) + (1 – 2$\sqrt{3}$)i

f(z) = z + (-$\sqrt{3}$-2) + (1 – 2$\sqrt{3}$)i = z + z_0

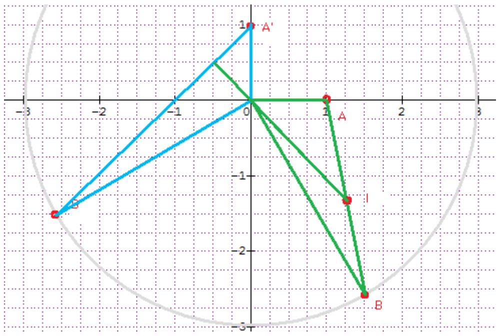
donc f correspond à la translation de vecteur d'affixe z_0

b) Z_1 =f(z_1)= (-$\sqrt{3}$-2) + (1 – 2$\sqrt{3}$)i + $\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ =(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$-2) + ($\frac{3}{2}$ – 2$\sqrt{3}$)i

Z_2 =f(z_2)= (-$\sqrt{3}$-2) + (1 – 2$\sqrt{3}$)i +$\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ = (-$\sqrt{3}$-$\frac{3}{2}$) + (1 –$\frac{3}{2}\sqrt{3}$)i

Z_1 -z_1= $Z_2 - z_2$=z_0 donc $\overrightarrow{AA'}$=$\overrightarrow{BB'}$ donc ABB'A' est un parallélogramme

3) $z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{5\pi}{6}}$



Exercice 123 P49

1)

$z_B = 3e^{-i\frac{\pi}{3}} = 3\frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$z_{B'} = z_B e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{3}{2} - i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(-i) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - i\frac{3}{2}$

2)a) $z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{1+x+iy}{2} = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}$

b) l'affixe de A' est i

$z_{B'} = z_B e^{-i\frac{\pi}{2}} = (x+iy)(-i) = y - ix$

c) $z_{\overrightarrow{OI}} = z_I = \frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}$ $\qquad z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = y - ix - i$

Ainsi $\overrightarrow{OI}\begin{pmatrix}\frac{1+x}{2}\\ \frac{y}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\binom{y}{-x-1}$ $\qquad \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{A'B'} = \frac{1+x}{2}y + \frac{y}{2}(-x-1) = \frac{1}{2}(y + xy - xy - y)$=0

Le produit scalaire étant nul on sait que les deux vecteurs sont perpendiculaires et donc (OI) et (A'B') aussi.

d) A'B' = $|z_{\overrightarrow{A'B'}}| = |y - ix - i| = \sqrt{y^2 + (x+1)^2}$

OI = $|z_{\overrightarrow{OI}}| = \left|\frac{1+x}{2} + i\frac{y}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}(1+x+iy)\right| = \frac{1}{2}|(1+x+iy)| = \frac{1}{2}\sqrt{y^2+(x+1)^2} = \frac{1}{2}$ A'B'