Corrections d'exercices de probabilité

TP 1 P 100

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre total de cas.

A={5} ; B = {1 ;3 ;5 ;7 ;9 ;11 ;13 ;15 ;17 ;19} ; C = {5 ;10 ;15 ;20} ;
D = {5 ;15} ; E = {1 ;3 ;5 ;7 ;9 ;10 ;11 ;13 ;15 ;17 ;19 ;20}

P(A) = $\frac{nbr\ de\ cas\ favorables\ à\ A}{nbr\ total\ de\ cas} = \frac{1}{20}$ P(B) = $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ P(C) = $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ P(D) = $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

P(E) = $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

TP 2 P100

1°)

1 correspond aux comprimés dont la masse ne convient pas et dont la teneur en potassium est satisfaisante : $M \cap \overline{K}$ ou encore $M \backslash (M \cap K)$ 28 – 20 = 8

2 correspond aux comprimés dont la masse convient et dont la teneur en potassium n'est pas suffisante : $K \cap \overline{M}$ ou encore $K \backslash (M \cap K)$ 44 – 20 = 24

3 correspond aux comprimés qui sont deux fois non-conformes $M \cap K$ 20

4 correspond aux comprimés qui n'ont aucun problème : 400 – 44 = 356

2°)

	K	$\overline{K}$	Total
M	20	8	28
$\overline{M}$	24	348	372
Total	44	356	400

3°)

P(A) = 356/400 = 89/100 P(B) = 24/400 = 3/50
P(C) = 348/400 = 87/100 P(D) = (24+8)/400 = 2/25

Exercice 1 P104

P(A) = $\frac{nbr\ de\ cas\ favorables\ à\ A}{nbr\ total\ de\ cas} = \frac{1}{32}$ P(B) = 8/32 = ¼ P(C) = (8+3)/32 = 11/32

P(D) = P($\overline{C}$)=1- P(C) = 1 – 11/32 P(F) = 3/8

Exercice 2 P 104

1) P({1}) = P({3}) = P({5}) = x
P({2}) = P({4}) = P({6}) = y
On sait que P({1}) + P({3}) + P({5}) + P({2}) + P({4}) + P({6}) = 1
Donc 3x + 3y = 1
De plus on sait que x = 2y donc 3×2y + 3y = 1 donc 9y = 1
Ainsi y = 1/9 et x = 2/9
2) P(« chiffre impair »)
= P({1 ;3 ;5})
= P({1}) + P({3}) + P({5}) car les trois ensembles sont disjoints
= 6/9 = 2/3

P(« chiffre pair »)
= P({2 ;4 ;6})
= P({2}) + P({4}) + P({6}) car les trois ensembles sont disjoints
= 3/9 = 1/3

Exercice 3 P 104

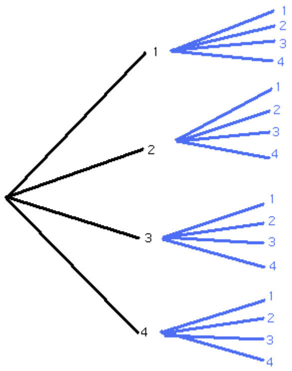
Réponse à la deuxième question \ Réponse à la première question	OUI	NON	Total
OUI	2	10	12
NON	11	5	16
Total	13	15	28

2°)
P(A) = 2/28 = 1/14
P(B) = (11+2+10)/28 = 23/28
P(C) = (11+10+5) / 28 = 26/28 = 13/14
3°)

La population de référence pour cette question est différente de celle des questions précédentes : on veut que la personne ai répondu non à la première question, on se place dans la colonne de droite , l'effectif total est de 15. La probabilité que la personne interrogée ai répondu non à la deuxième question sera de 5/15 = 1/3.

Exercice 5 P 105

1°) c'est long est fastidieux, vous devez le faire, moi pas ^^
2°) il y a 6×5 = 30 tirages possibles (V1, V2), (V1, J1) …(N2,J3)
P(A) = 8/30 = 4/15 il y avait 8 éventualités (couples, tirages) favorables : (V1, V2), (V2, V1), (J1, J2), (J1, J3), (J2, J1), (J2, J3), (J3, J1), (J3, J2)
P(B) = 8/30 = 4/15 il y avait 8 éventualités (couples, tirages) favorables : (V1, J1), (V1, N1), (V2, J2), (J1, V1), (J1, N1), (J2, V2), (N1, V1), (N1, J1)
3°) les deux évènements sont incompatibles car le tirage ne peux être constitué de deux éléments de même couleur et de même chiffre (le tirage est fait sans remise)
P(A∪ $B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{4}{15} + \frac{4}{15} - 0 = \frac{8}{15}$



Exercice 6 P106

1) Il y a 16 éventualités possibles :
(1 ;1) , **(1 ;2)** ;(1 ;3) ;(1 ;4) ; (2 ;1) , (2 ;2) ;**(2 ;3)** ;(2 ;4) ;
(3 ;1) , (3 ;2) ;(3 ;3) ;**(3 ;4)** ; (4 ;1) , (4 ;2) ;(4 ;3) ;(4 ;4) ;
2) sur les 16 éventualités seules 3 correspondent à l'événement « a et b pris dans cet ordre sont consécutifs », évènement noté A
P(A) = $\frac{3}{16}$

Exercice 7 P106

a) au niveau du premier nœud partent 32 branches, de chacune des 32 extrémités part 32 branches, et maintenant de chacune des 32 × 32 = 1024 partira encore 32 branches, je vais donc avoir 1024 ×32 = 32768 extrémités, donc 32 768 tirages possibles.
b) au niveau du premier nœud partent 32 branches, de chacune des 32 extrémités part 32-1=32 branches, et maintenant de chacune des 32 × 31 = 992 partira 31-1=30 branches, je vais donc avoir 992×30 = 29760 extrémités, donc 29 760 tirages possibles.

Exercice 8P106

1°) P(« épaisseur de 3 mm ») = (9+11+3+5) /100 = 28/100 = 7/25
P(« diamètre de 10 mm ») = (5+10+11+4)/100 = 30/100=3/10
P(« épaisseur de 2 mm ET diamètre de 12 mm ») = 15/100 = 3/20
P(« diamètre supérieur à 11 mm ») = P(« diamètre de 12 ou 15 mm »)= (6+15+3+2+7+6+5+6)/100 = 50/100 = ½
2°)a)
P(X = 3) = P(« épaisseur de 3 mm ») = (9+11+3+5) /100 = 28/100 = 7/25
b)

épaisseur xi	1	2	3	4
P(X=xi)	0,23	0,37	0,28	0,12

c) E(X) = 1×0,23 + 2×0,37+3×0,28+4×0,12 =2,29
d) V(X) = 0,23(1-2,29)²+0,37(2-2,29)²+ 0,28(3-2,29)²+0,12(4-2,29)² = 0,9059≈ 0,91
$\sigma(X) = \sqrt{\text{V(X)}} = \sqrt{0{,}9059} \approx 0{,}95$

Exercice 26 P 110

Pour calculer P($A \cup B$) on utilisera la formule : P($A \cup B$)= P(A) + P(B) - P($A \cap B$)

a) P($A \cup B$)= P(A) + P(B) - P($A \cap B$) = 0,63 + 0,21 – 0 = 0,84
b) P($A \cup B$)= P(A) + P(B) - P($A \cap B$) = 0,63 + 0,14 – 0 = 0,7

Exercice 31 P 110

$p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$

$4p_3+4p_3 + p_3 + p_3 = 1$

$10\ p_3 = 1$

Donc $p_3=0{,}1$ et donc $p_1=p_2= 0{,}4$ et $p_4 = 0{,}1$

Exercice 32 P 110

$p_A=2p_B$ et $p_B = 3pC$ donc $p_A = 6pC$

de plus $p_A + p_B + p_C = 1$

donc $6p_C + 3p_C + p_C = 1$

donc $10p_C=1$ donc $p_C = 0{,}1$ et $p_B =0{,}6$ et $p_A =0{,}3$

Exercice 34 P110

nombre de montres	avec défaut x	sans défaut x	totaux
présentant le défaut y	120	450	570
sans défaut y	880	8 550	9 430
totaux	1 000	9 000	10 000

P(A) = 1000/10000=1/10= 0,1

P(B) = 570/10000= 57/1000 = 0,057

P($A \cap B$) = 120/10000=3/250 = 0,012

Je note C = « la montre prélevée est sans défaut » P(C) = 8 550 / 10 000 = 0,855

$A \cup B = \overline{C}$ donc P $A \cup B$) = P ($\overline{C}$) = 1 – P(C) = 1 – 0,855 = 0,145

Autre approche : P($A \cup B$)= P(A) + P(B) - P($A \cap B$) = 0,1 + 0,057 – 0,012 = 0,145

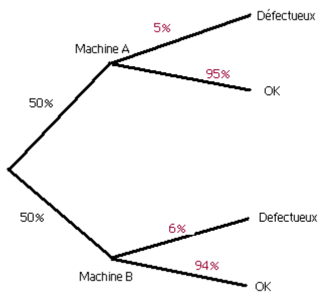
Exercice 37 P112

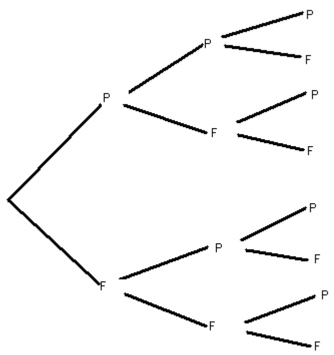
P(« défectueux »)

= P (« défectueux et machine A ») + P(« défectueux et machine B »)

= (50/100)(5/100) + (50/100)(6/100)

= 0,055 = 5,5%





Exercice 41 P 112

A = {(P,P,P) ; (F ;F ;F)}

P(A) = 2 / 8 = 0,25

B = {(P ;F ;F); (F ;P ;F); (F ;F ;P)}

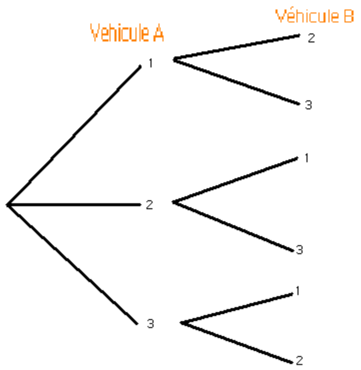
P(B) = 3/ 8=0,375

C = {(P ;F ;F); (P ;F ;P); (F ;P ;F); (P ;P ;F)}

P(C) = 4/8 = 0,5

Exercice 43 P112

Deux approches :



la deuxième est carrément plus lisible, on l'utilisera donc.

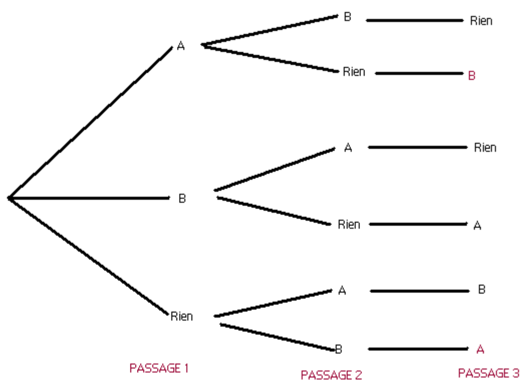
P(« côte à côte ») = 4/6 = 2/3

P(« pas côte à côte ») = 1-2/3 = 1/3

P(« la voie trois reste libre ») = 2/6 = 1/3

P(« à gauche du véhicule ») = 2/6 = 1/3

Remarque : vu le peu de combinaisons possibles le plus rapide était d'écrire les 6 possibilités.



Exercice 49 P114
1°)
{{1 ;2} ; {1 ;3} ;{1 ;4} ;{1 ;5} ; {1 ;6} ; {2 ;3} ;{2 ;4} ;{2 ;5} ; {2 ;6};{3 ;4} ;{3 ;5} ; {3 ;6};{4 ;5} ; {4 ;6}; {5;6}}
P(A) = 5/15 = 1/3
P(B) = 12/15 = 4/5
P(C) = 2/15
2°)
P($A \cap B$) = 3/15 = 1/5
P($A \cup B$)= P(A) + P(B) - P($A \cap B$) = 1/3 + 4/5 - 1/5 = 14/15

Exercice 50 P114
1)
a) Il y en tout 1 952 employés administratif dont 83% sont des femmes (1952$\times$ 83/100) ce qui fait a peu près 1620 femmes et donc il y a aussi 332 hommes.
b) il y a en tout 730 employés de commerce, dont 77,2% de femme (730$\times$ 77,2/100) soit environ 564 femmes, le reste : 166 hommes.
2)
P (« employés administratif femme ») = 1620 / 6128 $\approx$ 0,26
P($\overline{"femme\ employée\ de\ commerce"}$)= 1 - P($"femme\ employée\ de\ commerce"$) = 1 – 564/6128 $\approx$ 0,91
Une femme ne pouvant pas être à la fois employée de commerce et employée administratif d'entreprise, les évènement A = « la femme choisie est employée de commerce » et B=« la femme choisie est employée administratif d'entreprise » sont disjoint donc P($A \cap B$) = 0

P($A \cup B$)= P(A) + P(B) - P($A \cap B$) = P(A) + P(B) = 1620 / 6128 + 564/6128 = 2184 / 6128 $\approx$ 0,36

Exercice 53 P115
A 1 E(X)= 0×0,920+1×0,060+2×0,016+3×0,004 = 0,104
2 V(X) = (0-0,104)²×0,920+(1-0,104)²×0,060+(2-0,104)²×0,016+(3-0,104)²×0,004 = 0,149184
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}149184} \approx 0{,}39$
B 1

yi Prix de vente en francs	5	15	20	30
P(Y=yi)	0,004	0,016	0,06	0,92

2 E(Y) = 30×0,920+20×0,060+15×0,016+5×0,004 = 29,6
E(Y) correspond au prix auquel on peut éspérer vendre les pièces quand on en écoule une bonne quantité.

Exercice 54 P 115

yi : gain	-1	0	5
P(Y=yi)	$\frac{10}{32}$	$\frac{20}{32}$	$\frac{2}{32}$

E(Y) = $\frac{2}{32}5 + \frac{20}{32}0 + \frac{10}{32}(-1) = 0$
Le jeux est donc équitable.

Exercice 56P116
1)a) $p_1=\frac{n}{n+5}$ $p_2=\frac{2}{n+5}$ $p_3=\frac{3}{n+5}$
b) on veut que $p_2=\frac{2}{11}$ $\Leftrightarrow \frac{2}{n+5} = \frac{2}{11}$ $\Leftrightarrow$ n+5 = 11 $\Leftrightarrow$ n = 6
c) on veut que $p_2=\frac{1}{5}$ $\Leftrightarrow \frac{2}{n+5} = \frac{1}{5}$ $\Leftrightarrow$ n+5 = 10 $\Leftrightarrow$ n = 5
2)

xi : gain	2	3	7
P(X=xi)	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}=\frac{5}{10}$	$\frac{1}{5}=\frac{2}{10}$

$E(X) = 2\frac{3}{10} + 3\frac{5}{10} + 7\frac{2}{10} = \frac{35}{10} = 3{,}5$
$V(X) = (2-3{,}5)^2\frac{3}{10} + (3-3{,}5)^2\frac{5}{10} + (7-3{,}5)^2\frac{2}{10} = 3{,}25$ et donc $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3{,}25} \approx 1{,}80$

Exercice 57P116
A
1) **Retrouvons les résultats proposé dans la question 1 :**
on peut poser x =la probabilité d'obtenir un 1, ainsi x = P({1})= P({3})= P({5})= P({7})
et donc 2x = P({2})= P({4})= P({6})= P({8})
Or 1 = P({1})+ P({3})+ P({5})+ P({7})+ P({2})+ P({4})+ P({6})+ P({8})
⇔ 1 =x+x+x+x+2x+2x+2x+2x ⇔ 1=12x ⇔ $x = \frac{1}{12}$ donc chaque nombre pair a une probabilité de $\frac{1}{12}$ d'être obtenu et chaque nombre pair a une probabilité de $\frac{2}{12}$ d'être obtenu
Version alternative : vérifions que ce qui est proposé par l'énoncé , à savoir : chaque nombre pair a une probabilité de $\frac{1}{12}$ d'être obtenu et chaque nombre pair a une probabilité de $\frac{1}{6}$ d'être obtenu, est bien vrai.
Ainsi proposé on a bien tous les numéros de même parité qui ont la même probabilité de sortir
On a bien chaque nombre pair qui a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair car $\frac{1}{6} = 2\,\frac{1}{12}$
Et la somme des probabilités des différentes éventualités vaut bien 1, donc la proposition de l'énoncé est recevable
2) P (« obtenir un numéro pair ») = P({2 ;4 ;6 ;8}) = $4\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
P(« obtenir un numéro impair ») = 1- P(« obtenir un numéro pair »)= 1 - $\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$
P(« obtenir un 1 ou un 2 ») = P({1 ;2}) = P({1}) + P({2}) = $\frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$
B
1)et2) les valeurs possibles pour les variables aléatoires X et G sont données respectivement par les lignes x_i et g_i

tirage	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	7	6	5	4	3	2	1	0
g_i	21	18	15	12	9	6	3	0
$P(G=g_i)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

$E(G) = \frac{1}{12}21 + \frac{1}{6}18 + \frac{1}{12}15 + \frac{1}{6}12 + \frac{1}{12}9 + \frac{1}{6}6 + \frac{1}{12}3 + \frac{1}{6}0 = 10$
V(G) = $\frac{1}{12}(21-10)^2 + \frac{1}{6}(18-10)^2 + \frac{1}{12}(15-10)^2 + \frac{1}{6}(12-10)^2 + \frac{1}{12}(9-10)^2 + \frac{1}{6}(6-10)^2 + \frac{1}{12}(3-10)^2 + \frac{1}{6}(0-10)^2 = 47$
$\sigma(G) = \sqrt{V(G)} = \sqrt{47} \approx 6{,}86$

Exercice 58P116
1)

x_i	3	2	0	-2	-4	-5
$P(X=x_i)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$

2)
$E(X) = \frac{2}{12}3 + \frac{1}{12}2 + \frac{3}{12}0 + \frac{3}{12}(-2) + \frac{1}{12}(-4) + \frac{2}{12}(-5) = -1$
V(X) = $\frac{2}{12}(3+1)^2 + \frac{1}{12}(2+1)^2 + \frac{3}{12}(0+1)^2 + \frac{3}{12}(-2+1)^2 + \frac{1}{12}(-4+1)^2 + \frac{2}{12}(-5+1)^2 = \frac{22}{3}$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{22}{3}} \approx 2{,}71$
3)
$P(X \in [E(X) - \sigma(X); E(X) - \sigma(X)]) = P(\{-2; 0\}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ car -2 et 0 sont les deux seules valeurs que x peut prendre et qui sont bien dans l'intervalle $[E(X) - \sigma(X); E(X) - \sigma(X)]$.
Pour info $E(X) - \sigma(X) \approx -3{,}71$ et $E(X) + \sigma(X) \approx 1{,}71$
4)
Soit x le gain à associer aux faces 1 et 2 pour que E(X) = 0
⇔ $\frac{2}{12}x + \frac{1}{12}2 + \frac{3}{12}0 + \frac{3}{12}(-2) + \frac{1}{12}(-4) + \frac{2}{12}(-5) = 0$
⇔ $\frac{2}{12}x - \frac{18}{12} = 0$ ⇔ $\frac{2}{12}x = \frac{18}{12}$ ⇔ 2x = 18 ⇔ x = 9
Il faudra donc remplacer par 9€ le gain associé aux faces 1 et 2 .