gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

TIGE – Chap 9. Calcul intégral

I. Intégrale d'une fonction sur un intervalle

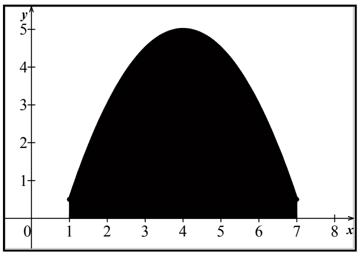
Définition.
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I de ℝ, F une primitive de *f* sur I, *a* et *b* deux nombres de I. On appelle **intégrale de *a* à *b* de *f*** le nombre réel noté $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$ et on le note $\int_a^b f(t)dt$, *a* et *b* sont les **bornes** de l'intégrale.

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = [\mathrm{F}(t)]_a^b = \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) \text{ où F est une primitive de } f}$$

Exemples.
□ Calculer $\int_0^1 (x^2+1)dx$.
La fonction $f(x) = x^2+1$ admet pour primitive $\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3}+x$, donc $\int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}+1\right)-\left(\frac{0^3}{3}+0\right) = \frac{4}{3}$
Si nous choisissons une autre primitive, l'intégrale sera-t-elle la même ?
$\mathrm{F}_2(x) = \frac{x^3}{3}+x+4$ est une autre primitive de *f* donc $\int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x+4\right]_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}+1+4\right)-\left(\frac{0^3}{3}+0+4\right) = \frac{4}{3}+4-4 = \frac{4}{3}$
L'intégrale est indépendante du choix de la primitive.
Sur la calculatrice : math 9:fonctIntégr(*x,t*,θ,*n* *x*² + 1 , *x,t*,θ,*n* , 0 , 1) entrer
□ $\int_1^e \frac{1}{t}dt = [\ln t]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1-0 = 1$

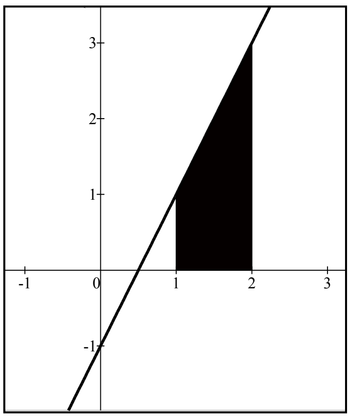
II. Interprétation graphique

Théorème.
Soit *f* une fonction dérivable et positive sur un intervalle I, *a* et *b* deux nombres de I. $\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire du domaine délimité par la courbe c d'équation *y* = *f*(*x*), l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations *x* = *a* et *x* = *b* :
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



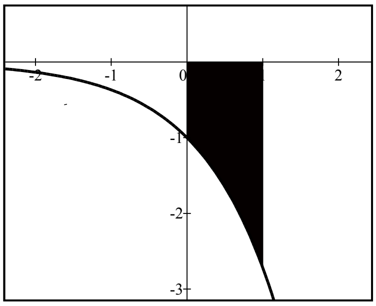
Exemple.
Déterminer la portion d'aire comprise entre la courbe de la fonction $f(x) = 2x-1$, l'axe des abscisses et les droites *x* = 1 et *x* = 2.
$\int_1^2 (2x-1)dx = [x^2-x]_1^2 = (2^2-2)-(1^2-1) = 2.$

L'aire hachurée ici est un trapèze de base 1 et 3 et de hauteur 1.
Son aire est donc $\frac{(1+3)\times 1}{2} = 2.$



Sur la calculatrice.
f(*x*) Y₁= 2nde *e*ˣ 2 × *x*,*t*,θ,*n*
2nde calculs 7:∫f(*x*)d*x*
Borne Inf ? 0 entrer *Borne Sup ?* 1 entrer

Remarque.
L'aire est calculée en « unités d'aire ».
Cette unité dépend des longueurs choisies comme unité sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

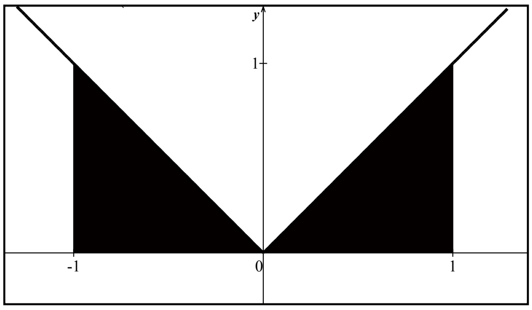


Remarque.
Si la fonction *f* est négative alors $a = -\int_a^b f(t)dt$ est l'aire du domaine délimité par la courbe c d'équation $y = f(x)$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équations $x = a$ et $x = b$ c'est à dire $\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$.
Par convention $\int_a^b f(t)dt \leq 0$ lorsque la fonction *f* est négative.

III. Propriétés de l'intégrale :

Théorème. Relation de Chasles
Soit *f* une fonction dérivable sur un intervalle I et soit *a*, *b* et *c* trois points de I.

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$



Cas particulier.

$$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt$$

Exemple.

$$\int_{-1}^{1} |t|dt = \int_{-1}^{0} -tdt + \int_0^1 tdt = \left[-\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Théorème. Linéarité de l'intégrale
Soit *f* et *g* deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit *a* et *b* deux points de I.
Soit α et β deux nombres réels

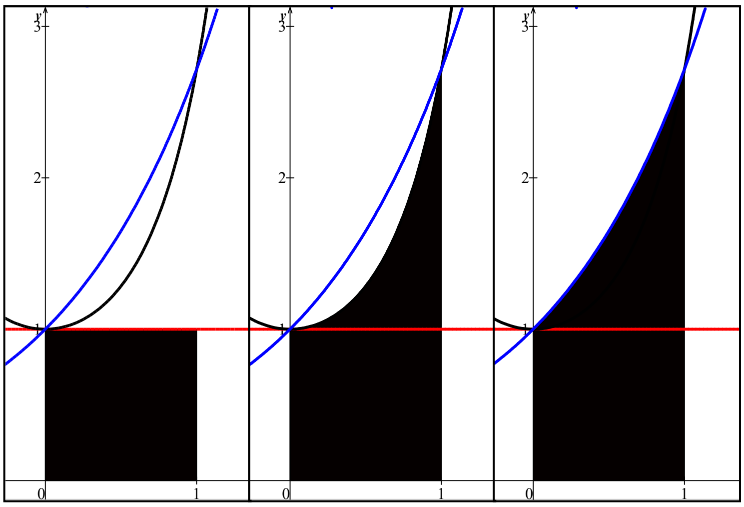
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Exemple.

$$\int_1^2 \left(6t + \frac{5}{t}\right) dt = 6\int_1^2 tdt + 5\int_1^2 \frac{1}{t}dt = 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + 5[\ln t]_1^2 = 6\left[2 - \frac{1}{2}\right] + 5\ln 2 = 9 + 5\ln 2$$

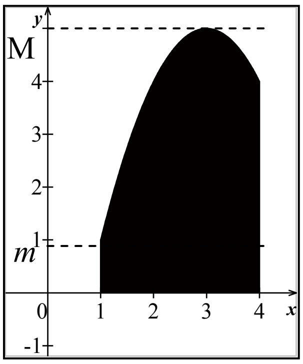
Théorème. Positivité
Si *f* est une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a,b]$, avec $a \leq b$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.

Théorème. Intégration d'une inégalité
Soit *f* et *g* deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a,b]$
Si pour tout *t* de $[a,b]$ $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$



Exemple.
Donner un encadrement de $\int_0^1 e^{t^2}dt$.
On sait que si $0 \leq t \leq 1$ alors $0 \leq t^2 \leq t$ en multipliant par *t*.

gaelle.buffet@ac-montpellier.fr



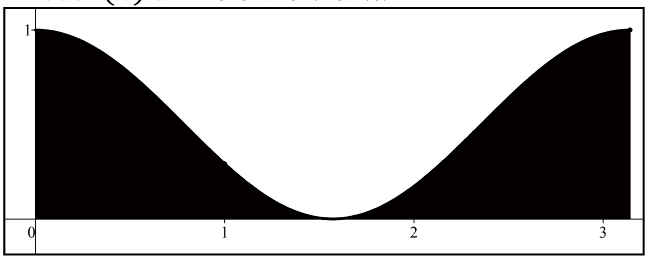
donc $e^0 \leq e^{t^2} \leq e^t$ car la fonction exponentielle est croissante.
On en déduit donc que $\int_0^1 e^0 dt \leq \int_0^1 e^{t^2} dt \leq \int_0^1 e^t dt$
Soit $[t]_0^1 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt \leq [e^t]_0^1 \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \int_0^1 e^{t^2} dt \leq e - 1 \approx 1{,}71$

Cas particulier. Inégalité de la moyenne
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$
si pour tout $t \in [a,b]$, $m \leq f(t) \leq \mathrm{M}$ alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq \mathrm{M}(b-a)$

Interprétation graphique.
$\int_a^b f(t)dt$ représente l'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe de f, $x = a$ et $x = b$. Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle de largeur $(b–a)$ et de longueur m la valeur minimale de f et l'aire du rectangle de largeur $(b–a)$ et de longueur M la valeur maximale de f.

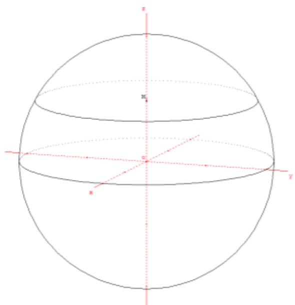
Définition.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a,b]$ avec $a \leq b$
On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le nombre réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$
Exemple.
Déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x) = \cos^2(x)$ affine entre 0 et π.

$$V_m = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \cos^2 t dt = \frac{1}{\pi-0}\int_0^\pi \frac{1+\cos(2t)}{2} dt$$
$$V_m = \frac{1}{2\pi}\left[t + \frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^\pi$$
$$V_m = \frac{1}{2\pi}\left(\pi + \frac{\sin(2\pi)}{2} - 0 - \frac{\sin(0)}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

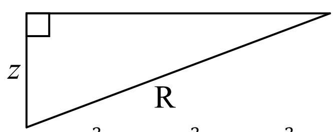


IV. Calcul de volume :

Théorème.
On considère le solide limité par les plans d'équations $z = a$ et $z = b$ et dont la section avec les plans parallèles au plan de base admet une surface d'aire $S(z)$.
Le volume de ce solide est donné par $V = \int_a^b S(z)\, dz$.



Exemple.
On munit l'espace d'un repère orhonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Nous cherchons à calculer le volume de la sphère de centre O et de rayon R > 0.
$S(z)$ est l'aire du disque section par un plan de cote z.
Le rayon de ce disque est donné par l'hypoténuse du triangle ci-dessous : $\sqrt{\mathrm{R}^2 - z^2}$



$S(z) = \pi \times (\mathrm{R}^2 - z^2) = \pi\mathrm{R}^2 - \pi z^2$
donc $V = \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} (\pi\mathrm{R}^2 - \pi z^2)\, dz = \left[\pi\mathrm{R}^2 z - \pi\frac{z^3}{3}\right]_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} = \pi\mathrm{R}^3 - \pi\frac{\mathrm{R}^3}{3} + \pi\mathrm{R}^3 - \pi\frac{\mathrm{R}^3}{3} = \frac{6\pi\mathrm{R}^3}{3} - \frac{2\pi\mathrm{R}^3}{3} = \frac{4\pi\mathrm{R}^3}{3}$