Chap 5. Probabilités

Le programme :

Quelques notions de calcul des probabilités ont été introduites en première ; en terminale, on poursuit l'étude de phénomènes aléatoires. Le programme comporte une consolidation des acquis de première et l'introduction, sur des exemples simples, du concept de variable aléatoire. On se limite à des ensembles finis ; toute théorie formalisée est exclue et les notions de probabilité conditionnelle, d'indépendance et de probabilité produit ne sont pas au programme.
Pour les variables aléatoires, *le programme ne porte que sur l'étude d'exemples*.

Variable aléatoire (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type.	On prendra un point de vue très simple : certaines situations de probabilité s'expriment commodément par l'affectation de probabilités p_1, p_2, …, p_n aux valeurs x_1, x_2, …, x_n d'une grandeur numérique X associée à une expérience aléatoire ; on dit alors que X est une variable aléatoire. Les événements $(X=x_1)$, $(X= x_2)$, ..., $(X= x_n)$ sont les événements élémentaires de la loi de probabilité de X. Pour la fonction de répartition, on emploiera la convention $F(x) = p(X \leq x)$.

Travaux pratiques

Exemples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux...) pour organiser et dénombrer des données relatives à des situations aléatoires.	L'étude du dénombrement des permutations, arrangements et combinaisons est hors programme.
Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux...).	On conserve le même point de vue qu'en première ; en particulier, on s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités, et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.
Exemples simples d'étude de situations menant à l'étude d'une variable aléatoire	Des indications doivent être données sur la méthode à suivre

I. Vocabulaire des probabilités

Une **expérience aléatoire** est une expérience pouvant être répétée dans des conditions identiques et dont l'issue n'est pas prévisible à priori.

Exemple.
Le jet d'un dé est une expérience aléatoire.

Une **éventualité** ou un **cas possible** est le résultat d'une épreuve aléatoire.

Exemple.
$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$ sont les éventualités de l'expérience aléatoire du jet de dé.

gaelle.buffet@ac-montpellier.fr

Chap 5. Probabilités

L'**univers** associé à une expérience aléatoire est l'ensemble des cas possibles d'une expérience aléatoire. L'univers est généralement noté Ω.

Exemple.
Ω={1,2,3,4,5,6}

Un **événement** est une partie de l'univers.

Exemple.
« obtenir un nombre pair » est un événement c'est l'ensemble {2,4,6}

Un **événement élémentaire** est un événement réduit à un seul cas possible.

Exemple.
« obtenir 6 » est un événement élémentaire, B= {6}.

Définition.
On considère une expérience aléatoire dont l'univers est composé d'un nombre fini de cas possible.
On appelle variable aléatoire X toute fonction de Ω à valeur dans ℝ.

Exemples.
►1. On joue 10 fois à pile ou face. On gagne 1 euro si pile sort et rien si face sort.
On peut définir une variable aléatoire X qui à toute partie de ce jeu associe le gain réalisé.
X peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 10. $X \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

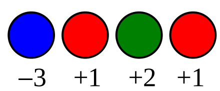
►2. On lance deux dés numérotés de 1 à 6. On peut définir une variable aléatoire X en associant à tout lancé, la somme des deux faces. X peut prendre toutes les valeurs entières entre 2 et 12.
$X \in \{2,3,4,\ldots,12\}$.

►3. Une urne contient deux boules rouges, une boule verte et une boule bleue.
Le jeu consiste à tirer au hasard une boule, de la replacer dans l'urne, puis de tirer une deuxième boule.
Tirer au hasard signifie que chaque boule a la même probabilité d'être tiré.
Pour chaque boule rouge tirée, on gagne 1 euro. Pour chaque boule verte tirée, on gagne 2 euros, pour chaque boule bleue tirée, on perd 3 euros.
Soit X la variable aléatoire qui à toute partie de ce jeu associe le gain réalisé.

Quel est l'univers Ω associé à l'expérience aléatoire ?
Les cas possibles sont :
(R,R) (R,B) (R,V) (B,B) (B,V) (V,V)

$$\Omega = \{(R,R),(R,B),(R,V),(B,B),(B,V),(V,V)\}$$

gains	R	B	V
R	2	–2	3
B	–2	–6	–1
V	3	–1	4



Définition d'une loi de probabilité.
On appelle loi de probabilité de la variable aléatoire de X la fonction définie sur X(Ω) et à valeur dans [0,1] qui associe, à chaque valeur de la variable aléatoire, sa probabilité :

$$p: \quad X(\Omega) \to [0;1]$$
$$\quad x_i \to p_i$$

Exemple :
Dans l'exemple précédent, déterminer la probabilité de chaque gain possible.

On construit l'arbre de choix de cette expérience aléatoire :

1er tirage	R				R				B				V			
2e tirage	R	R	V	B	R	R	V	B	R	R	V	B	R	R	V	B
gain	2	2	3	–2	2	2	3	–2	–2	–2	–1	–6	3	3	4	–1

x_i	–6	–2	–1	2	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Remarque.
La somme des probabilités pour toutes les valeurs possibles de la variable aléatoire est 1.
$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

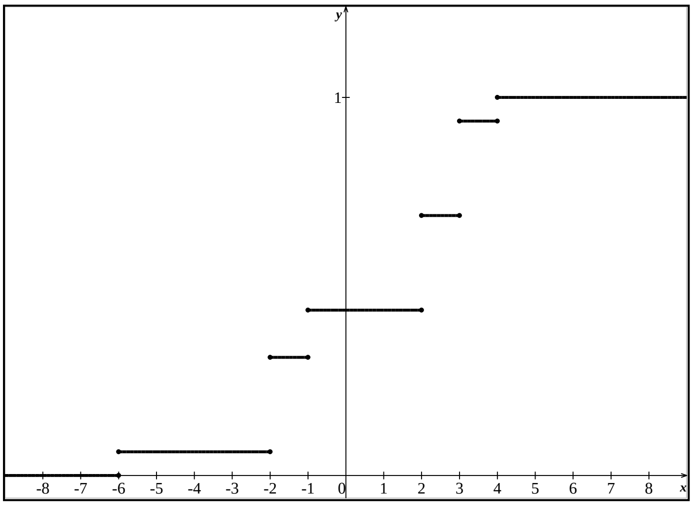
Exemple.

$$\frac{1}{16}\times 2+\frac{1}{4}\times 3+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}+\frac{6}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$$

Fonction de répartition.
C'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque intervalle de la forme $[x_i\,;\,x_{i+1}[$ associe la probabilité $p(X \leq x_{i+1})$.

Propriétés.
* $0 \leq F(x) \leq 1$
* La fonction de répartition $F(x) = p(X \leq x)$ est croissante.
* $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Exemple.



II. Moments d'une variable aléatoire

Définition de l'espérance mathématique.
L'espérance est la moyenne de la série statistique définie par la loi de probabilité de la variable aléatoire. On la note E(X)

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$

L'espérance de X est la moyenne pondérée des valeurs que X peut prendre, les poids étant les probabilités que ces valeurs soient prises.

Exemple.
Dans l'exemple précédent :
$E(X) = \frac{1}{16}\times(-6)+\frac{1}{4}\times(-2)+\frac{1}{8}\times(-1)+\frac{1}{4}\times 2+\frac{1}{4}\times 3+\frac{1}{16}\times 4=\frac{-3}{8}-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=$
$\frac{1}{2}$*L'espérance représente aussi le gain moyen par jeu lorsque le nombre de partie est infiniment grand.*

Définition de la variance et de l'écart type.
* La **variance** est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

$$\mathrm{Var(X)} = \sum_{i=1}^{n} p_i\left(x_i - \mathrm{E(X)}\right)^2 = p_1\left(x_1 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + p_2\left(x_2 - \mathrm{E(X)}\right)^2 + \ldots + p_n\left(x_n - \mathrm{E(X)}\right)^2$$

* **L'écart type** est la racine carrée de la variance : $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{Var(X)}}$
La variance et l'écart type mesure la dispersion d'une série de valeurs autour de leur moyenne.

Exemple.
Dans l'exemple précédent :

$$\mathrm{Var(X)} = \frac{1}{16}\left(-6-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(4-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{Var(X)} = \frac{1}{16}\left(\frac{-13}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{-5}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$\mathrm{Var(X)} = \frac{169}{64} + \frac{25}{16} + \frac{9}{32} + \frac{9}{16} + \frac{25}{16} + \frac{49}{64}$$

$$\mathrm{Var(X)} = \frac{169}{64} + \frac{100}{64} + \frac{18}{64} + \frac{36}{64} + \frac{100}{64} + \frac{49}{64} = \frac{472}{64} = \frac{59}{8} = 7{,}375$$

et $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{7{,}375} \approx 2{,}72$