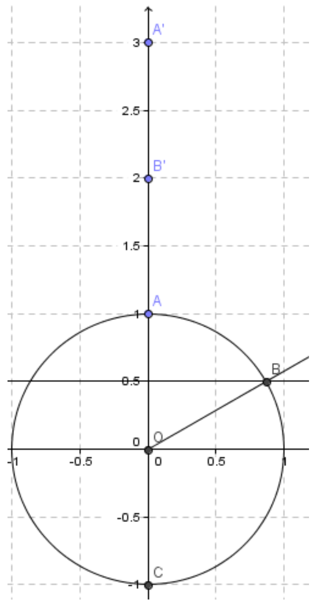
Devoir maison : complexes



Exercice 206P274

1) a) $a' = a + i - \frac{1}{a} = i + i - \frac{1}{i} = 2i - \frac{i}{i^2} = 3i$

$b' = e^{\frac{i\pi}{6}} + i - \frac{1}{e^{\frac{i\pi}{6}}} = e^{\frac{i\pi}{6}} + i - e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} + i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = 2i$

b) Voir figure

c) $-\frac{b}{b'-b} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{2i-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{\left(\frac{3}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ on pourrait multiplier par la quantité conjuguée et continuer les calculs ou … $\left|\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{3}$ du coup $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\frac{3}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ainsi $-\frac{b}{b'-b} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{3}e^{\frac{i2\pi}{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{i\pi}{6}-\frac{i2\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{i3\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-i) = \frac{\sqrt{3}}{3}i$

d) Quel est le rapport ??? il faut penser en terme d'affixe de vecteurs $b' - b = z_{B'} - z_B = z_{\overrightarrow{BB'}}$ de la même manière $0 - b = z_O - z_B = z_{\overrightarrow{OB'}}$ ainsi $-\frac{b}{b'-b} = \frac{z_{\overrightarrow{OB'}}}{z_{\overrightarrow{BB'}}}$ donc $\frac{z_{\overrightarrow{OB'}}}{z_{\overrightarrow{BB'}}} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$ et donc $\frac{OB'}{BB'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $(\overrightarrow{BB'};\overrightarrow{OB'}) = \frac{\pi}{2}$ du coup on a $(\overrightarrow{B'B};\overrightarrow{B'O}) = \frac{\pi}{2}$ le triangle OBB' est donc rectangle.

2) Antécédents de O

a) $\left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = z^2 - z\frac{\sqrt{3}}{2} + z\frac{1}{2}i + z\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i + z\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{4}i - \frac{1}{4} = z^2 + zi - 1$ CQFD

b) (E) est l'ensemble des antécédents de O donc ce sont les complexes z qui vérifient : $z + i - \frac{1}{z} = 0$ or 0 n'étant pas une des solutions cette équation est équivalente à $zz + iz - \frac{1}{z}z = 0z \Leftrightarrow z^2 + iz - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 0$ d'après a)

donc $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\}$

c) $S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right\} = \left\{e^{\frac{i7\pi}{6}};e^{\frac{-i\pi}{6}}\right\}$ donc les deux solutions sont de module 1, les points associés sont donc sur le cercle de centre O et de rayon 1.

3) a) Si $z = e^{i\theta}$ alors $z' = e^{i\theta} + i - \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + i - e^{-i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta + i - \cos\theta + i\sin\theta = i(1 + 2sin\theta)$

b) Si M appartient au cercle Gamma alors il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$ donc d'après la question précédente l'affixe de son image sera $i(1+2sin\theta)$ or $-1 \leq 1 + 2sin\theta \leq 3$ donc M' est sur un segment vertical d'extrémités les points d'affixes $-i = z_C$ et $3i = z_{A'}$ donc $M \in [A'C]$

Exercice 207 P275

1) Si il était isocèle on aurait au moins deux côtés de même mesure, calculons OA, OB et AB. $OA = |z_{\overrightarrow{OA}}| = |z_A - z_O| = |z_A| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$

$BA = |z_{\overrightarrow{BA}}| = |z_A - z_B| = |7 - 3i - 2 + 5i| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29} = OA$

Donc le triangle est bien isocèle en A **la proposition 1 est juste**

2) Si on pose A et B deux points vérifiant : $z_A = i$ et $z_B = -2i$, alors $|z - i| = |z + 2i| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow$ AM=BM $\Leftrightarrow$ M est sur la médiatrice de [AB] segment situé sur l'axe des imaginaires or la médiatrice d'un segment est perpendiculaire à celui-ci, et donc notre ensemble de point est bien parallèle à l'axe des réels. **la proposition 2 est juste**

3) On peut prouver facilement que $z = 2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}$, de plus $z^{3n} = (z^3)^n = \left(\left(2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^3\right)^n = 2\sqrt{3}^{3n}\left(e^{\frac{i3\pi}{6}}\right)^n = 2\sqrt{3}^{3n}i^n$ donc z^{3n} ne sera un imaginaire pur qu'une fois sur 2 … version rapide si $n = 2$ alors $z^{3\times2} = \left(2\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}\right)^6 = 1728e^{\frac{i6\pi}{6}} = -1728$ **la proposition 4 est fausse**

4) Si $\frac{\pi}{2}$ est l'argument de z alors $z = iy$ avec y un réel strictement positif. Dans ce cas $|i + z| = |i(1+y)| = 1 + y$ et $1 + |z| = 1 + y$ donc **la proposition est vraie**.

5) Si z a son module qui vaut 1 alors il existe un réel θ tel que $z = e^{i\theta}$ ainsi $z^2 + \frac{1}{z^2} = e^{i\theta^2} + \frac{1}{e^{i\theta^2}} = e^{i2\theta} + e^{-i2\theta} = 2\cos(2\theta)$ ce complexe étant réel **la proposition 5 est juste**