# Devoir maison

**P268n°143**

1) $f(-3+i)=\frac{-3+i+1-2i}{-3+i+2+i}=\frac{-2-i}{-1+2i}=\frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{(-2-i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)}=\frac{2+4i+i-2}{(-1)^2+2^2}=\frac{5}{5}i=i$

2) $f(z)=2i \Leftrightarrow \frac{z+1-2i}{z+2+i}=2i \Leftrightarrow z+1-2i=2i(z+2+i) \Leftrightarrow z+1-2i=2iz+4i-2$

$\Leftrightarrow z(1-2i)=-3+6i \Leftrightarrow z=\frac{-3+6i}{(1-2i)} \Leftrightarrow z=\frac{(-3+6i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \Leftrightarrow z=\frac{-3+6i-6i-12}{5} \Leftrightarrow z=\frac{-15}{5} \Leftrightarrow z=-3$

3) $f(x+i\,y)=\frac{x+i\,y+1-2i}{x+i\,y+2+i}=\frac{x+i\,y+1-2i}{(x+2)+i(y+1)}=\frac{(x+i\,y+1-2i)\big((x+2)-i(y+1)\big)}{\big((x+2)+i(y+1)\big)\big((x+2)-i(y+1)\big)}$

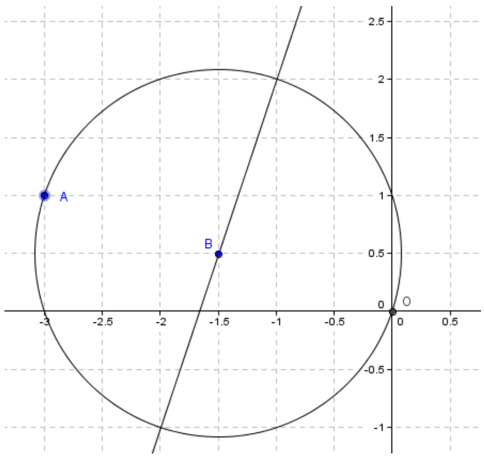
$$=\frac{x^2+2x-ixy-ix+ixy+2iy+y^2+y+x+2-iy-i-2xi-4i-2y-2}{((x+2)^2+(y+1)^2)}$$

$$=\frac{x^2+2x+y^2+y+x+2-2y-2+i(-xy-x+xy+2y-1-y-2x-4)}{((x+2)^2+(y+1)^2)}$$

$$=\frac{x^2+3x+y^2-y+i(-3x+y-5)}{((x+2)^2+(y+1)^2)}=\frac{x^2+3x+y^2-y}{((x+2)^2+(y+1)^2)}+i\frac{-3x+y-5}{((x+2)^2+(y+1)^2)}$$

4) pour que $f(z)$ soit un réel pur la partie imaginaire doit être nulle donc on doit avoir : $\frac{-3x+y-5}{((x+2)^2+(y+1)^2)}=0$ autrement dit il faut que $-3x+y-5=0$, donc les points M doivent être sur la droite d'équation $y=3x+5$

Pour que $f(z)$ soit un imaginaire pur il faut que la partie réelle soit nulle donc que $\frac{x^2+3x+y^2-y}{((x+2)^2+(y+1)^2)}=0$ autrement dit que $x^2+3x+y^2-y=0$ on reconnait une équation de cercle à terminer




$x^2+2x\frac{3}{2}+y^2-2y\frac{1}{2}=0 \;\Leftrightarrow x^2+2x\frac{3}{2}+\frac{9}{4}+y^2-2y\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\sqrt{\frac{10}{4}}^2$ donc les points M sont sur le cercle de centre B d'affixe $z_B=\left(-\frac{3}{2}+i\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{\sqrt{10}}{2}$

**Exercice 144P268**

1a) les points invariants ont leur affixe qui vérifie :

$f(z)=z \Leftrightarrow \frac{2z}{z-2i}=z \Leftrightarrow 2z=z(z-2i)$

$\Leftrightarrow 0=z^2-2z-2iz \Leftrightarrow 0=z\big(z-(2+2i)\big) \Leftrightarrow z=0\ ou\ z=2+2i$

b) I est le milieu de [AB] donc $z_I=\frac{(z_A+z_B)}{2}=1+i$

$f(z_B)=f(2)=\frac{2\times 2}{2-2i}=\frac{2\times 2(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)}=\frac{8+8i}{8}=1+i=z_I$ donc l'image de B par $f$ est I.

$f(z_I)=f(1+i)=\frac{2(1+i)}{1+i-2i}=\frac{(2+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i+2i-2}{2}=2i=z_B$ donc l'image de I par $f$ est B

2) on sait que $z'=\frac{2z}{z-2i}$ donc que $|z'|=\left|\frac{2z}{z-2i}\right|$ autrement dit $|z'-0|=\left|2\frac{z-0}{z-2i}\right|$ ainsi : $\left|z_{\overrightarrow{OM'}}\right|=2\left|\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right|$donc $OM'=2\frac{OM}{AM}$

De la même manière on peut montrer que :

$$\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=\arg\left(z_{\overrightarrow{OM'}}\right)=\arg\left(2\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{AM}}}\right)=\arg(2)+\arg\left(z_{\overrightarrow{OM}}\right)-\arg\left(z_{\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$$

$$=0+\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)-\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]=\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{OM}\right)[2\pi]$$

3) Si $M$ est sur la médiatrice de [OA] alors $\frac{OM}{MA}=1$ donc on aura toujours $OM'=2\frac{OM}{AM}=2\times 1=2$ donc M' sera sur le cercle de centre O et de rayon 2.

4) soit M un point du cercle de diamètre [OA] privé du point A , alors on aura $(OM)\perp(AM)$ donc $\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{OM}\right)=\mp\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Or $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM'}\right)=\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ donc M' est sur la perpendiculaire à $\vec{u}$ passant par O autrement dit l'axe des imaginaires.

5)