Corrigé exercice 2 (Bac amérique du nord 3 juin 2010)

1) le triangle ADE est équilatéral direct donc $\frac{AE}{AD}=1$ et $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{\pi}{3}$, or $\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}$ est le complexe de module $\frac{AE}{AD}$ et d'argument $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ donc on a : $\frac{z_E-z_A}{z_D-z_A}=1e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z_E-z_A=(z_D-z_A)e^{i\frac{\pi}{3}}$ donc $z_E=(z_D-z_A)e^{i\frac{\pi}{3}}+z_A=(1-i)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}+i=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})(1+i)$

2) $z_{D'}=\frac{2z_D-i}{iz_D+1}=\frac{2-i}{i+1}=\frac{(2-i)(1-i)}{(i+1)(1-i)}=\frac{2-2i-i-1}{1+1}=\frac{1}{2}+i\frac{3}{2}$

3)a) $(z'+2i)(z-i)=\left(\frac{2z-i}{iz+1}+2i\right)(z-i)=\left(\frac{2z-i}{iz+1}+\frac{2i(iz+1)}{iz+1}\right)(z-i)=\left(\frac{2z-i-2z+2i}{iz+1}\right)(z-i)=\left(\frac{i}{iz+1}\right)(z-i)=\left(\frac{iz+1}{iz+1}\right)=1$

b) $(z'+2i)(z-i)=1$ donc $|(z'+2i)(z-i)|=|1|$ donc $|(z'+2i)|\,|(z-i)|=1$ donc $|(z'-z_B)|\,|(z-z_A)|=1$ donc $BM'\times AM=1$

De plus on aura : $\arg(z'+2i)(z-i)=\arg(1)$

Donc $\arg(z'-z_B)+\arg(z-z_A)=\arg(1)\ [2\pi]$ donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)=0\ [2\pi]$

Donc $\left(\vec{u};\overrightarrow{BM'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AM}\right)\ [2\pi]$

4) a) $AD=|z_D-z_A|=|1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

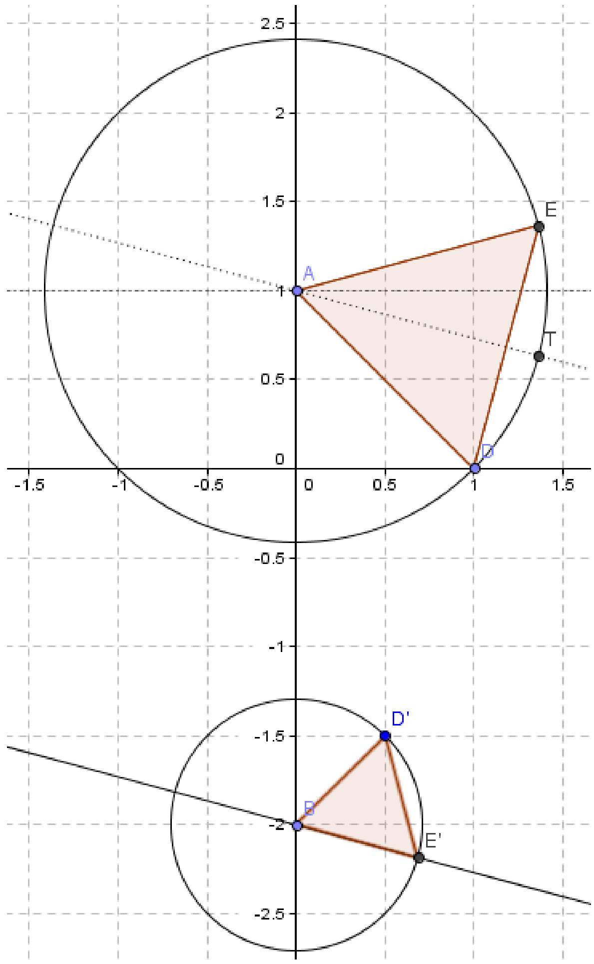
De plus AED est équilatéral donc AE=AD , donc les points E et D sont situés à la même distance $\sqrt{2}$ du point A donc ils sont sur le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{2}$

b) exploitation des résultat précédents pour placer le point E' image de E par la transformation f.

On aura d'après 3b) : $BE'\times AE=1$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{BE'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)\ [2\pi]$

Pour construire le point E' je trace T le symétrique de E par rapport à l'horizontale passant par A donc j'ai :

$\left(\vec{u};\overrightarrow{AT'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)\ [2\pi]$ puis j'ai tracé la parallèle à (AT) passant par B, ce qui me permet d'avoir le bon angle, il me reste tout de même à placer la bonne longueur $BE'\times AE=1$ donc $BE'\times\sqrt{2}=1$ donc $BE'=\frac{\sqrt{2}}{2}$ autrement dit la moitié d'une diagonale d'un carreau de côté une unité, ce qui correspond à BD' , j'ai donc tracé le cercle de centre B et de rayon BD et j'ai nommé E' le bon point d'intersection entre les la droite et le cercle.



c) le triangle semble équilatéral, le fait qu'il soit isocèle en B est immédiat mais pour la longueur du dernier côté je suis bloqué car je n'ai pas les coordonnées de E'.

Je vais donc passer par l'angle $\left(\overrightarrow{BE'};\overrightarrow{BD'}\right)$

$\left(\vec{u};\overrightarrow{BD'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AD}\right)\ [2\pi]=\frac{\pi}{4}$ ici la valeur de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{AD}\right)$ est triviale (ça prend du temps de la calculer)

Or $\left(\vec{u};\overrightarrow{BE'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)\ [2\pi]$ donc en retranchant membre à membre :

$\left(\vec{u};\overrightarrow{BD'}\right)-\left(\vec{u};\overrightarrow{BE'}\right)=-\left(\vec{u};\overrightarrow{AD}\right)+\left(\vec{u};\overrightarrow{AE}\right)\ [2\pi]$ donc

$\left(\overrightarrow{BE'};\overrightarrow{BD'}\right)=\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AE}\right)\ [2\pi]=\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Comme en plus le triangle BE'D' est isocèle en B je peux affirmer qu'il est équilatéral direct.