Correction du DS 6

Exercice 1 **(**Métropole 2013)

1) Trouver a et b (8min)
   a. La courbe représentative de f passe par $B(1{,}2)$ donc $f(1) = 2$, de plus la tangente à cette courbe en B est horizontale donc de coefficient directeur nul donc $f'(1) = 0$
   b. $f(x) = \frac{a+b\ln x}{x}$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$ on aura : $f'(x) = \frac{\left(\frac{b}{x}\right)x-(a+b\ln x)}{x^2} = \frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$
   c. $\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a+b\ln 1}{1} = 2 \\ \frac{(b-a)-b\ln 1}{1^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b-a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases}$
2) Les variations de f (12min)
   a. $f'(x) = \frac{(b-a)-b\ln x}{x^2} = \frac{0-2\ln x}{x^2}$ or sur $\mathbb{R}_+^*$ x^2 est toujours strictement positif donc $f'(x)$ et $-\ln x$ sont de même signe
   b. $f(x) = \frac{a+b\ln x}{x} = \frac{2+2\ln x}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2\ln x}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\ln x}{x} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
   $f(x) = \frac{1}{x}(2+2\ln x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2+2\ln x = -\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$
   c. Pour le tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$-\ln x$	||	+		-	
$f'(x)$	||	+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	0

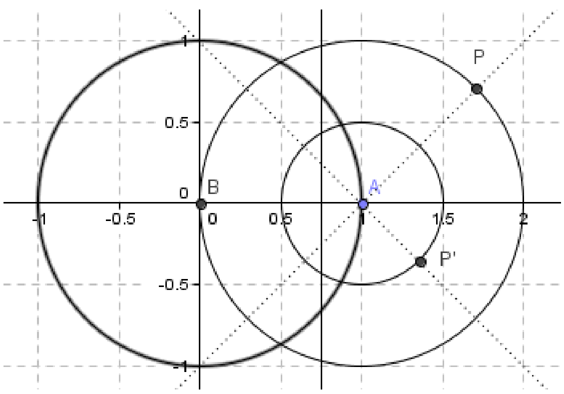
3) Recherche des antécédents de 1 par f (8min)
   a. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$ et $f(1) = 2$ et $1 \in]-\infty; 2]$ donc c'est bien une valeur intermédiaire, de plus la fonction f est continue et strictement croissante sur $]0; 1]$ donc d'après l'extension du théorème de la bijection 1 a un unique antécédent par f sur $]0; 1]$ on le notera α.
   b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $f(1) = 2$ et $1 \in]0; 2]$ donc c'est bien une valeur intermédiaire, de plus la fonction f est continue et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$ donc d'après l'extension du théorème de la bijection 1 a un unique antécédent par f sur$[1; +\infty[$ on le notera β
   c. Avec mon programme de dichotomie j'ai obtenu $5{,}356 < \beta < 5{,}357$

Exercice 2 Nouvelle Calédonie (novembre 2012)

Partie A (8min)

1) $z^2 - 2z + 2 = 0$ $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4$ ici $\Delta < 0$ donc $z_1 = \frac{2-i\sqrt{-(-4)}}{2} = 1 - i$ et $z_2 = 1 + i$.
2) Pour montre que M_1 et M_2 sont sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 1 , il faut et suffit de montrer que $AM_1 = AM_2 = 1$ $AM_1 = |z_{M_1} - z_A| = |1 - i - 1| = |-i| = 1$ et $AM_2 = |z_{M_2} - z_A| = |i| = 1$ ainsi les deux points sont bien sur le cercle $\mathcal{C}$.

Partie B (41min)



1) Dessin sur la courbe

2) Pour $z \neq 1$ on a $(z'-1)(z-1) = \left(\frac{2z-1}{2z-2} - 1\right)(z-1) = \left(\frac{2z-1}{2z-2} - \frac{2z-2}{2z-2}\right)(z-1) = \left(\frac{1}{2(z-1)}\right)(z-1) = \frac{1}{2}$

3) $AM \times AM' = |z_M - z_A|\,|z_{M'} - z_A| = |z-1|\,|z'-1| = |(z'-1)(z-1)| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$
Par l'absurde si M'=A alors $(z'-1)(z-1) = (1-1)(z-1) = 0$ ce qui contredit le résultat de la question 2 donc c'est impossible M' et A sont nécessairement distincts.
$(z'-1)(z-1) = \frac{1}{2}$ donc $\arg\big((z'-1)(z-1)\big) = \arg\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $\arg(z'-1) + \arg(z-1) = 0 + 2k\pi$ donc $\left(\vec{u}; \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AM}\right) = 0 + 2k\pi$

4) $z_{\overrightarrow{AP}} = z_P - z_A = e^{\frac{i\pi}{4}}$ complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, donc P est sur $\mathcal{C}$. Pour le construire, j'ai tracé une diagonale de carré passant par A et montante, elle forme un angle de $\frac{\pi}{4}$ par rapport à l'horizontale et elle coupe le cercle en P.

5) D'après la question 3 : $AP' = \frac{\frac{1}{2}}{AP} = \frac{1}{2}$ donc on est sur le cercle de centre A et de rayon ½ , on sait aussi que $\left(\vec{u}; \overrightarrow{AP'}\right) + \left(\vec{u}; \overrightarrow{AP}\right) = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\vec{u}; \overrightarrow{AP'}\right) = -\left(\vec{u}; \overrightarrow{AP}\right) + 2k\pi \Leftrightarrow \left(\vec{u}; \overrightarrow{AP'}\right) = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$

6) Image de la droite d'équation $x = \frac{3}{4}$
   a. Il suffit de montrer que M' a pour module 1. On a M sur la droite d'équation $x = \frac{3}{4}$ donc $z = \frac{3}{4} + yi$ et donc $z' = \frac{2z-1}{2z-2} = \frac{2\left(\frac{3}{4}+yi\right)-1}{2\left(\frac{3}{4}+yi\right)-2} = \frac{\frac{1}{2}+i\,2y}{-\frac{1}{2}+i\,2y} = \frac{(1+i\,4y)}{(1-i4y)}$ donc $|z'| = \frac{|1+i\,4y|}{|1-i\,4y|} = \frac{\sqrt{1+16}}{\sqrt{1+16}} = 1$ donc OM' =1 donc M' est bien sur le cercle de centre O et de rayon 1
   b. Soit M' un point du cercle de centre O et de rayon 1 et donc $z' = e^{i\theta}$ avec θ un réel. Cherchons le ou les antécédents de z' : $z' = \frac{2z-1}{2z-2} \Leftrightarrow z'(2z-2) = 2z-1 \Leftrightarrow 2zz' - 2z' = 2z - 1$ $\Leftrightarrow 2zz' - 2z = 2z' - 1 \Leftrightarrow 2z(z'-1) = 2z' - 1$ et là pour pouvoir exprimer z en fonction de z' je suis obligé de diviser à gauche et à droite par $2(z'-1)$ et ce que je ne peux faire que si $z' \neq 1$, donc A qui est un point de mon cercle de centre O et de rayon 1 n'aura pas d'antécédent (dans ce cas l'équation se traduira par 0=1 ce qui est impossible)

Exercice 3

17min+4min+4min

1) Cherchons la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$:
$\frac{c-b}{a-b} = \frac{\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})-i}{-1-i} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{3}i}{-1-i} = \frac{\sqrt{6}e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}-i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{3}e^{-i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$
Cherchons la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$:
$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})+1}{1+i} = \frac{(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i}{1+i} = \frac{\left((\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i\right)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(\sqrt{3}+1)+(1-\sqrt{3})i-(\sqrt{3}+1)i+(1-\sqrt{3})}{1+1}$
$= \frac{2-2\sqrt{3}i}{2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc l'angle B du triangle ABC mesure 60°

2) M est sur la médiatrice de [BM] ⇔ AM=BM ⇔ $|z-a| = |z-b| \Leftrightarrow |z+1| = |z-i|$

3) $\arg\left(\frac{-1-z}{i-z}\right) = \arg\left(\frac{a-z}{b-z}\right) = \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ on cherche donc les points M tels que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ donc on a, à faire au cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.