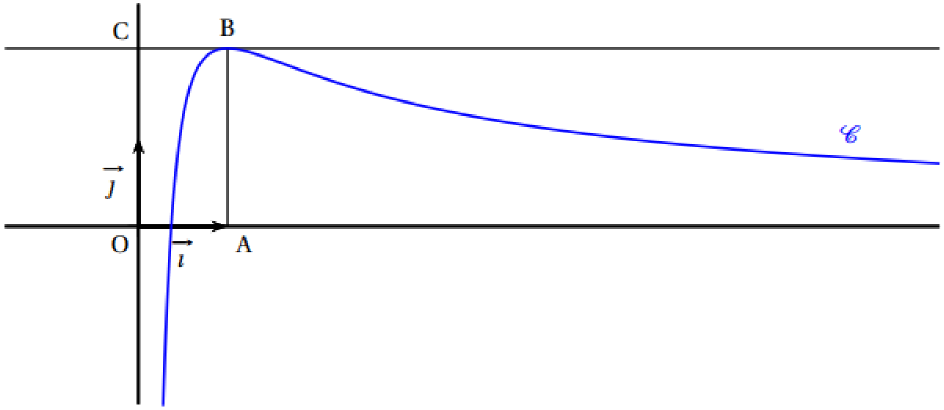
Nom & Prénom : ……………………………………………………

Devoir surveillé n°6

www.dimension-k.com

Exercice 1

Sur le graphique ci-dessous , on a tracé dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$



On dispose des informations suivantes :

- Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives$(1;0)$, $(1;2)$ et $(0;2)$
- La courbe $\mathcal{C}$ passe par le point B et la droite (BC) est tangente à $\mathcal{C}$ en B
- Il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réels x strictement positifs on a : $f(x)=\frac{a+b\ln x}{x}$
-

1 a) en utilisant le graphique donner les valeurs de $f(1)$ et de $f'(1)$

b) Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{(b-a)-b\ln x}{x^2}$.

c) En déduire les réels a et b.

2 a) Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ $f'(x)$ est du même signe que " $-\ln x$ ".

b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$ $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}$

c) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

3 a) Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0;1]$

b) Par un raisonnement analogue, on démontrera que qu'il existe βun unique réel dans $]1;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$.

c) Donner un encadrement à 10^{-3} de β.

Exercice 2 :

Dans un repère complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère le points A d'affixe 1 et $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon 1.
La figure sera réalisée sur une feuille de papier millimétré

Partie A

On considère l'équation : (E) $z^2-2z+2=0$

Où z est un complexe. On appelle z_1 et z_2 les solutions de (E).

1) Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.

2) On appelle M_1 et M_2 les points d'affixe respectives z_1 et z_2 dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Montrer que ces deux points appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

Partie B

On considère l'application f du plan complexe qui a tout point M d'affixe z distinct de A associe le point M' d'affixe z' définie par $z'=\frac{2z-1}{2z-2}$

1) Placer A et tracer le cercle $\mathcal{C}$ sur une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

2) Montrer que pour tout complexe z distinct de 1 on a $(z'-1)(z-1)=\frac{1}{2}$

3) Montrer que pour tout point M distinct de A on a :

- $AM \times AM' = \frac{1}{2}$
- $M' \neq A$
- $(\vec{u};\overrightarrow{AM})+(\vec{u};\overrightarrow{AM'})=0+2k\pi$, où k est un entier relatif.

4) On considère le point P d'affixe $z_P=1+e^{i\frac{\pi}{4}}$. Construire le point P.

5) En utilisant la question 3, expliquer comment construire le point P' image de P par f, réaliser cette construction.

6) Soit un point M appartenant à la droite D d'équation $x=\frac{3}{4}$, soit M' son image par f.

a) Montre que M' est sur $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O et de rayon 1

b) Tout point de $\mathcal{C}'$ a-t-il un antécédent par f ?

Exercice 3 :

Dans un repère complexe muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=-1$, $b=i$ et $c=\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})$

1) Est-ce que le triangle ABC a un des ses angles qui mesure 60°
2) Donner une équation dans $\mathbb{C}$ dont les solutions sont les affixes de la médiatrice de [AB]
3) Que décrivent les points M dont l'affixe z vérifie $\arg\left(\frac{-1-z}{i-z}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$